# Разложения Корниша–Фишера в методах статистического контроля качества


***Даньшина Мария Александровна***

*Студент*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* danschina.maria@yandex.ru


Основная цель при выполнении любых технологических процессов - не допустить выпуска дефектной продукции. При этом необходимо реализовать возможность воздействия на процесс, когда показатели продукции еще удовлетворяют установленным требованиям, а инструменты контроля отмечают наличие некоторых неслучайных факторов, приводящих к нарушению процесса [1]. Качество изделия часто характеризуется несколькими коррелированными между собой показателями. В таком случае необходимо применение многомерных статистических методов.

Положим $\bar{x}_{jt} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_{ijt}$, где $x_{ijt}$ - $i$-е наблюдение ($i = 1, 2, ..., n$) в $t$-ой мгновенной выборке ($t = 1, 2, ..., m$) по $j$-ой характеристике ($j = 1, 2, ..., p$). Пусть $\bar{X}_t = (\bar{x}_{1t}, \bar{x}_{2t}, ..., \bar{x}_{pt})$.

Построение карты Хотеллинга — один из наиболее распространенных методов статистического контроля. Для этого вычисляется статистика $T^2$ для каждой t-ой мгновенной выборки:

$$T_t^2 = n(\bar{X}_t - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_t - \mu),$$

где $n$-размер мгновенной выборки, $\sum$-ковариационная матрица, $\mu$-вектор средних. Для подтверждения гипотезы о стабильности процесса должно выполняться условие: $T_t^2 < T_{kp}^2$, где $T_{kp}^2$ — критическое значение, используемое для определения верхней контрольной границы.

Пусть $\chi^2_{\alpha,q}$, — $\alpha$-квантиль $\chi^2-$распределения с $q$ степенями свободы, $G_q(x)$- соответствующая функция распределения, $g(x)$ — плотность. Положим $a = mn - m - p + 1$, $b = p$. Если матрица ковариации неизвестна, то

$$T_{kp}^2 = \frac{b(m-1)(n-1)}{a} \cdot F_{\alpha,b,a},$$

где $F_{\alpha,b,a}$ есть $\alpha$-квантиль $F$-распределения с $b$ и $a$ степенями свободы. Если случайная величина $\xi \sim F_{d_1,d_2}$, то $d_1\xi \to \chi^2_{d_1}$ по распределению при $d_2 \to \infty$. Поэтому, зачастую, на практике при подсчете критического значения статистики вместо $b \cdot F_{\alpha,b,a}$ используют $\chi^2_{\alpha,b}$.

В работе получены асимптотическое разложение типа Корниша–Фишера [2] для квантилей $F$-распределения на базе квантилей $\chi^2$ -распределения, а также оценки ошибки аппроксимации [3][4].

Рассмотрим $S = Y_q/(Y_n n^{-1})$, где $Y_q$ и $Y_n$ имеют $\chi^2$-распределение с $q$ и $n$ степенями свободы соответственно.

Пусть $F_n(x) = P(S \leq x)$. Имеет место разложение вида [3]:

$$F_n(x) = G_q(x) + n^{-1} \sum_{j=0}^{2} a_j \cdot G_{q+2j}(x) + R_2,$$

где $a_0 = -\frac{1}{4}\ q(q-2)$, $a_1 = \frac{1}{2}q^2$, $a_2 = -\frac{1}{4}q(q+2)$. Перепишем это разложение в виде разложения типа Эджворта:

$$F_n(x) = G_q(x) + n^{-1} \left( \frac{a_1 + a_2}{q} x + 2 \frac{a_2}{q(q+2)} x^2 \right) \cdot g(x) + O(n^{-2}).$$

Тогда разложение Корниша–Фишера [2] выглядит следующим образом:

$$x_\alpha = u_\alpha - \frac{1}{n} \left( \frac{q-2}{2} u_\alpha - \frac{1}{2} u_\alpha^2 \right) + O(n^{-2}),$$

где $x_\alpha$ и $u_\alpha$ квантили соответствующие $F_n$ и $G_q$, $F_n(x_\alpha) = G_q(u_\alpha)$.

Данный результат позволяет более точно вычислять контрольную границу карты Хотеллинга.

**Литература**


1. Кравцов Ю. А. (2015). Модели, алгоритмы и программы обнаружения нарушений при многомерном статистическом контроле процесса
`http://www.ssau.ru/files/resources/dis_protection/Kravtsov_Ju_A_Modeli_algoritms.pdf`
2. Ulyanov V.V. (2011). Cornish–Fisher Expansions, International Encyclopedia of Statistical Science, Vol. 1 Ed. M. Lovric — Springer Berlin, — P. 312–315
3. V. V. Ulyanov, Y. Fujikoshi (2001). On Accuracy of improved $\chi^2$-approximations, Georgian Mathematical Journal//Vol. 8 No. 2, 401–414
4. Ryochi Shimizu, Yasunori Fujikoshi (1997). Sharp error bounds for asymptotic expansions of the distribution functions for scale mixtures //Ann. Inst. Statist. Math - Vol. 49, No.2, 285–297