Теорема о совпадениях n $(n \geq 2)$ отображений метрического пространства

Бакулина Мария Сергеевна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: riasn@yandex.ru

В 2014 году Rakesh Batra, Sachin Vashistha и Rajesh Kumar в работе [1] ввели следующий новый тип отображений-сжатий метрического пространства (X, d).

Определение 1. *[1, Определение 3.1] Зафиксируем любое отображение $g : X \to X$. Тогда отображение $T : X \to X$ называется $(F$-$g)$ – сжатием, если существует такое $\tau > 0$, что $\forall x, y \in X$, где $T(x) \neq T(y)$, $g(x) \neq g(y)$ верно:*

$$\tau + F(d(T(x), T(y))) \leq F(d(g(x), g(y))). \tag{1}$$

где функция $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) F – строго возрастающая функция, то есть $\forall a, b \in \mathbb{R}$, таких что $a < b$, выполняется $F(a) < F(b)$;

(F2) Для любой последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ положительных чисел $\lim_{n \to \infty} F(a_n) = -\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(F3) Существует такое $k \in (0, 1)$ что $\lim_{a \to +0} a^k F(a) = 0$;

Одним из основных результатов работы [1] является следующая теорема:

Теорема 1. *[1, Теорема 3.9] Определим метрическое пространство (X, d) и отображение $T : X \to X$, которое является $(F - g)$ – сжатием, причем $T(X) \subseteq g(X)$. Тогда, если выполнено одно из условий:*

1) (X, d) – полное метрическое пространство и отображения T и g в X коммутируют и непрерывны;

2) $g(X)$ – полное подпространство в X;

то g и T имеют точку совпадения $x^* \in X$ с единственным общим значением $w = g(x^*) = T(x^*)$.

В докладе рассматривается аналогичная задача о совпадениях для случая n отображений ($n \geq 2$). Получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть задано метрическое пространство* (X, d), *отображения* $g_j : X \to X$, $\forall j = 1, 2, ...n$, *и функция* $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая условиям (F1)-(F3) предыдущего определения, причем* $g_1(X) \subseteq g_2(X) \subseteq ... \subseteq g_n(X)$. *Пусть существует фиксированное* $\tau > 0$ *такое, что для любых* $x, y \in X, x \neq y$, *и* $\sum\limits_{k=1}^{n-1} d(g_k(x), g_k(y)) \neq 0$, $\sum\limits_{k=2}^{n} d(g_k(x), g_k(y)) \neq 0$, *выполнено неравенство:*

$$\tau + F(\sum_{j=1}^{n-1} d(g_j(x), g_j(y))) \leq F(\sum_{j=2}^{n} d(g_j(x), g_j(y))). \tag{2}$$

Пусть также выполнено одно из условий:

1) (X, d) – *полное метрическое пространство и отображения* g_1, g_2,...g_{n-1}, g_n *коммутируют и непрерывны в* X;

2) $g_n(X)$ - *полное пространство, и образы* $g_j(X)$ *замкнуты в* $g_n(X)$, $j = 1, ..., n-1$.;

Тогда отображения g_1, g_2,...g_n *имеют точку совпадения* $x^* \in X$ *с единственным общим значением* $w = g_1(x^*) = g_2(x^*) =...= g_n(x^*)$.

Литература

1. Batra R., Vashistha S. and Kumar R. Coincidence Point Theorem for a New Type of Contraction on Metric Spaces // Int. Journal of Math. Analysis. 2014. Vol. 8, № 27. P. 1315 - 1320