

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСОВ В СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ченцов Евгений Петрович

Аспирант

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

E-mail: chencov.evg@gmail.com

Явление резонанса представляет большой практический интерес для многих научных и производственных областей. Проводимое исследование ориентировано на разработку эффективных методов анализа резонансных явлений в структурно-неоднородных материалах.

Общая постановка. Процесс распространения упругих волн бесконечно малой амплитуды в дискретных механических системах можно описать с помощью системы дифференциальных уравнений

$$A\ddot{U} + BU = F, \quad (1)$$

где A – симметричная положительно определенная матрица обобщенных масс, U – вектор обобщенных координат, B – симметричная неотрицательно определенная матрица, F – вектор внешних сил. Для системы (1) верно уравнение $\dot{E} = F\dot{U}$, характеризующее изменение полной энергии: $E = (\dot{U}A\dot{U} + UBU)/2$. В случае, если вектор внешних сил зависит от времени периодически с частотой ω ($F = \hat{F}e^{i\omega t}$), то периодическим будет и вектор обобщенных координат $U = \hat{U}e^{i\omega t}$, при этом $(B - \omega^2 A)\hat{U} = \hat{F}$. Исключением являются только резонансные частоты, для которых нарушается условие периодичности U . Квадраты частот $\omega^2 = \lambda$ являются корнями характеристического уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$. Для нерезонансных частот $\hat{U} = -R(\omega^2) A^{-1} \hat{F}$, где $R(\lambda) = (\lambda E - A^{-1}B)^{-1}$ – резольвента, E – единичная матрица. Для исследования поведения системы в окрестности собственных частот строится спектральный портрет матрицы $A^{-1}B$ [3], отображающий изменение вектора \hat{U} в окрестности резонансных частот.

Исследованы случаи продольных и вращательно-поперечных колебаний. В обоих случаях рассмотрена линейная дискретная цепочка из n материальных точек массы m , соединенных между собой пружинами жесткости k . Расстояние между материальными точками равно h , длина цепочки в целом $l = (n - 1)h$.

Продольные колебания. В данном случае к массам цепочки в продольном направлении приложены возмущающие силы P_j , в результате которых массы получают перемещения u_j , зависящие от времени. Уравнения движения в форме Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = P_j, \quad T = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \dot{u}_j^2, \quad \Pi = \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^2.$$

Здесь $L = T - \Pi$ – функция действия, T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия цепочки. Данные уравнения приводятся к системе (1), решаемой аналитически [2]. Система уравнений для собственных векторов автоматически выполняется, если

$$\lambda = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, \quad \alpha = \frac{\pi s}{n}, \quad (s = 0, \dots, n - 1).$$

Показано, что при увеличении числа элементов в линейной цепочке резонансные частоты стремятся к собственным частотам продольных колебаний однородного упругого стержня с граничными условиями, соответствующими способу закрепления концов цепочки [1].

Вращательно-поперечные колебания. Пусть на элементы цепочки действуют поперечные силы Q_j и вращательные моменты R_j , в результате чего элементы поворачиваются на малые углы φ_j и получают в поперечном направлении малые перемещения u_j . Представим граничные условия в виде

$$u_1 + u_0 = 0, \quad u_{n+1} + u_n = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_0 = 0, \quad \varphi_{n+1} - \varphi_n = 0 \quad (2)$$

после введения в цепочку двух дополнительных элементов с индексами $j = 0$ и $j = n + 1$. Уравнения Лагранжа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_j &= a \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} - a \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + Q_j, \\ J\ddot{\varphi}_j &= a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - a \frac{\varphi_{j-1} + 2\varphi_j + \varphi_{j+1}}{4} + b \frac{\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}}{h^2} + R_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) также можно представить в виде системы (1). Подстановка в однородные уравнения выражений ($s = 1, \dots, n$)

$$u_j = \hat{u} e^{i\omega t} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \varphi_j = \hat{\varphi} e^{i\omega t} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi s}{n+1}$$

приводит к системе линейных уравнений для амплитуд \hat{u} и $\hat{\varphi}$. Условие равенства нулю определителя системы позволяет получить биквадратное уравнение для определения собственных частот цепочки, причем найденные частоты при естественных ограничениях на параметры цепочки всегда действительные и различные для разных s . Устремляя $l \rightarrow \infty$, можно установить, что $\omega_0 = \sqrt{a/J}$. Это единственная собственная частота в бесконечной цепочке, которая связана с вращательным движением элементов. Других резонансных частот нет.

На рис. 1 изображен спектральный портрет. По размеру пятен на этом рисунке можно судить о том, что при приближении к частоте ω_0 амплитуды колебаний нарастают примерно в такой же степени, как и при приближении к остальным резонансным частотам.

Уравнения (3) в пределе для бесконечной цепочки длины l переходят в одномерные дифференциальные уравнения континуума Коссера:

$$\rho_0 \ddot{u} = a_0(u_{xx} - \varphi_x) + q(x, t), \quad J_0 \ddot{\varphi} = a_0(u_x - \varphi) + b_0 \varphi_{xx} + r(x, t) \quad (4)$$

с граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$, $\varphi_x(0) = \varphi_x(l) = 0$. Коэффициенты уравнений пересчитываются через механические параметры дискретной модели из соотношений сохранения полной массы и суммарного момента инерции, а собственные частоты континуума вычисляются по формулам, которые могут быть получены предельным переходом в формулах для частот собственных колебаний конечной цепочки. Резонансные свойства континуума Коссера на основе моделей пространственно-напряженно-деформированного состояния изучались в монографии [4]. Установлено, что в моментной среде существует резонансная частота, связанная с вращательным движением частиц, не зависящая от размеров области и от типа граничных условий на ее границе.

Источники и литература

- 1) Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Соппротивление материалов. – М.: Наука, Гл. ред. ФИЗМАТЛИТ, 1986. – 560 с.
- 2) Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А Матрицы и вычисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1984. – 320 с.

- 3) Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. – Новосибирск: Научная книга, 1997. – 284 с.
- 4) Sadovskaya O., Sadovskii V. Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials. Ser.: Advanced Structured Materials, V. 21. Springer, Heidelberg – New York – Dordrecht – London, 2012. 390 p.

Слова благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-00130).

Иллюстрации

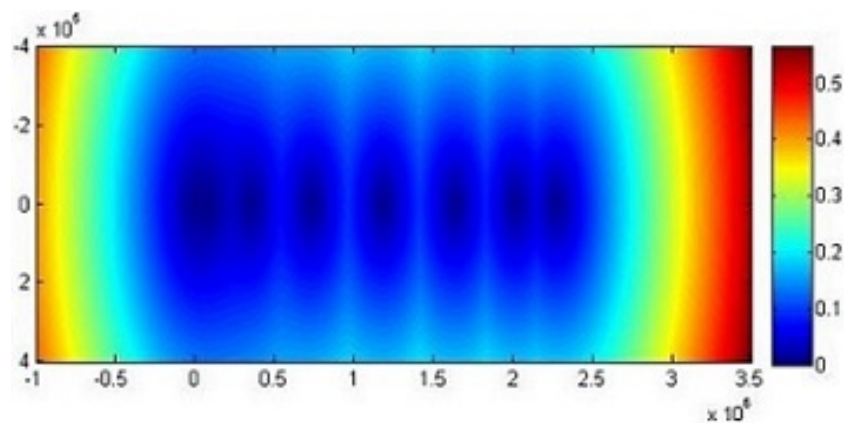


Рис. 1. Спектральный портрет матрицы, $n = 9$