Секция «Теория упругости»

Нелинейная задача о сосредоточенной силе в двухкомпонентной плоскости из материала Джона

Доманская Татьяна Олеговна
Студент (магистр)
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: tanyath57@gmail.com

Рассматривается плоская задача нелинейной теории упругости для двухкомпонентной плоскости при действии сосредоточенной силы на межфазной линии. Механические свойства описываются моделью гармонического материала Джона [2]. Использование этой модели позволило применить теорию комплексных функций и получить общее аналитическое решение краевой задачи. Исходя из этого решения, получены точные значения номинальных и истинных напряжений и перемещений в окрестности точки приложения силы.

Для гармонического материала Джона закон упругости имеет вид [1]

$$s_{11} + is_{12} = 2\mu\left[\frac{2}{I}\Phi'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}\right],$$

$$s_{22} - is_{21} = 2\mu\left[\frac{2}{I}\Phi'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}\right].$$

Пусть в начале координат на линии раздела приложена внешняя сила с компонентами F_1 и F_2, обозначим $F = F_1 + iF_2$. Предполагается, что на бесконечности напряжения и поворот отсутствуют. Условия на линии раздела двух полуплоскостей имеют вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ - [s_{22} - is_{21}]^- = -iF\delta(t),$$

$$[g_{11} + ig_{21}]^+ - [g_{11} + ig_{21}]^- = 0.$$

Номинальные напряжения для верхней полуплоскости

$$s_{11} + is_{12} = -\frac{F}{z}\frac{(1-2\mu_2 b_2)}{2\pi(1+2b_2(\mu_1-\mu_2))} - \frac{F}{\overline{z}}\frac{\mu_2 b_1}{\pi(1+2b_1(\mu_2-\mu_1))}, \quad z \in S_2,$$

$$s_{22} + is_{12} = -\frac{F}{z}\frac{(1-2\mu_2 b_2)}{2\pi(1+2b_2(\mu_1-\mu_2))} + \frac{F}{\overline{z}}\frac{\mu_2 b_1}{\pi(1+2b_1(\mu_2-\mu_1))}, \quad z \in S_2.$$

Для напряжений $s_{11} + is_{12}$ выписана только главная часть. Номинальные напряжения для нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

Показано, что все номинальные напряжения имеют особенность типа $1/r$ при $r \to 0$, перемещения имеют логарифмическую особенность.

Рассмотрим истинные напряжения Коши

$$\varkappa_1(t_{11} + it_{12}) = s_{11} + is_{12}, \quad \varkappa_2(t_{22} - it_{21}) = s_{22} - is_{21},$$

где $\varkappa_i = |\mathbf{e}_i \cdot J\mathbf{G}^{-1}|$ – кратности изменения площади. При плоской деформации кратности изменения площади при $r \to 0$ имеют особенность $1/r$, следовательно, истинные напряжения Коши не имеют особенности в полюсе.

Источники и литература

1) Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 1. С. 114-126.
2) John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. XIII. P. 239-290.