Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Теоремы о характеризации для бимодальной логики

Осипов Илья Игоревич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия

E-mail: osipovilia@gmail.com

Задача характеризации возникает как обратная к переводу модальных формул в язык первого порядка. Если для модального и первопорядкового языков в заданных сигнатурах имеется перевод, сохраняющий истинность формул в заданном классе шкал, то во многих случаях оказывается возможным определить по формуле первого порядка, эквивалентна ли она переводу какой-то модальной. Классический результат Ван Бентема [1] позволяет описать множество всех первопорядковых формул (в сигнатуре с одним отношением и счетным числом одноместных предикатов), эквивалентных в классе всех моделей (той же сигнатуры) стандартным переводам модальных формул, в терминах бисимуляций.

Определение 1. Бисимуляцией между двумя моделями $M = (W, R, \vec{P})$ и $M' = (W', R', \vec{P}')$ называется непустое отношение $E \subset W \times W'$, обладающее следующими свойствами для любых $w, v \in W$, $w', u' \in W'$:
1) $wEw' \Rightarrow \forall i(P_i(w) = P'_i(w'))$,
2) $wEw' \wedge wRv \Rightarrow \exists v'(w'R'v' \wedge vEv')$,
3) $wEw' \wedge w'Ru' \Rightarrow \exists u(wRu \wedge uEu')$.

Определение 2. Формула первого порядка от одной переменной $\phi(x)$ сохраняется при бисимуляции E между моделями M и M', если в любых вершинах w и w', соединенных бисимуляцией $(w, w') \in E$, формула $\phi(x)$ будет иметь одинаковую истинность $M \models \phi(w) \leftrightarrow M' \models \phi(w')$.

Теорема Ван Бентема утверждает, что необходимое множество формул – это в точности формулы первого порядка от одной переменной, сохраняющиеся при бисимуляции. Доказательство теоремы Ван Бентема нетрудно обобщить на элементарные классы шкал. Впрочем, и на некоторые неэлементарные классы теорему о характеризации можно распространить. Наиболее интересен оказывается случай конечных шкал. Хотя результат распространяется на множество всех конечных шкал (теорема Ван Бентема-Розена [1]), его нельзя обобщить, например, на случай конечных транзитивных шкал [4].

Далее речь пойдет о классах шкал, связанных с бимодальной логикой $K \times K$ – логикой произведений шкал.

Определение 3. Для шкал с одним отношением $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$ их произведением будем называть шкалу с двумя отношениями $F_1 \times F_2 = (W_1 \times W_2, R_h, R_v)$, где
$(u, v)R_h(u', v') \Leftrightarrow uR_1u' \wedge v = v'$,
$(u, v)R_v(u', v') \Leftrightarrow u = u' \wedge vR_2v'$.

Определение 4. Логика $K \times K$ – это бимодальная логика всех шкал-произведений.
$K \times K = Log\{F_1 \times F_2 \, |F_1, F_2$ - шкалы $K\}$.

Нетрудно заметить, что в множестве шкал логики $K \times K$ будут шкалы, не являющиеся произведениями шкал. Множество всех ее шкал (при стандартном определении истинности модальных формул) составляют все шкалы с двумя коммутирующими отношениями, обладающие свойством Черча-Россера [2].
Определить логику $K \times K$ можно иначе, как логику класса шкал с одним отношением, где истинность модальных формул определяется так:

Определение 5. Для шкалы $F = (W, R)$ и бимодальной формулы A верно $F \models A$ тогда и только тогда, когда для любой модели $M = (W, R, \vec{P})$, где $\vec{P}$ - семейство двуместных предикатов на W, и для любых двух ее вершин $u, v \in W$ верно $M, (u, v) \models A$, а истинность формул в моделях определяется индуктивно:
$M, (u, v) \not\models \bot$,
$M, (u, v) \models p_i \Leftrightarrow P_i(u, v)$,
$M, (u, v) \models A \to B \Leftrightarrow M, (u, v) \models A \to M, (u, v) \models B$,
$M, (u, v) \models \Box_h A \Leftrightarrow \forall u' \in W(uRu' \to M, (u', v) \models A)$,
$M, (u, v) \models \Box_v A \Leftrightarrow \forall v' \in W(vRv' \to M, (u, v') \models A)$,
где A и B – произвольные бимодальные формулы.

В этом случае перевод модальных формул в язык первого порядка можно будет определить иначе:

Определение 6. [3] Квадратный перевод $(A)^2(x, y)$ бимодальной формулы A задается индукуцией по длине формулы:
$\bot^2(x, y) = \bot$,
$p_i^2(x, y) = P_i(x, y)$,
$(A \to B)^2(x, y) = A^2(x, y) \to B^2(x, y)$,
$(\Box_h A)^2(x, y) = \forall z(xRz \to A^2(z, y))$,
$(\Box_v A)^2(x, y) = \forall z(yRz \to A^2(x, z))$,
где A и B – произвольные бимодальные формулы.

Определим понятие бисимуляции для моделей с двумя отношениями и для моделей с двуместными предикатами.

Определение 7. Бисимуляцией между моделями $M = (W, R_1, R_2, \vec{P})$ и $M' = (W', R_1', R_2', \vec{P}')$ называется непустое отношение $E \subset W \times W'$ такое, что для любых $w, v \in W$, $w', u' \in W'$ если wEw', то:
1) $\forall i(P_i(w) = P_i'(w'))$,
2) $wR_1v \Rightarrow \exists v'(w'R_1'v' \wedge vEv')$,
3) $w'R_1u' \Rightarrow \exists u(wR_1u \wedge uEu')$.
4) $wR_2v \Rightarrow \exists v'(w'R_2'v' \wedge vEv')$,
5) $w'R_2u' \Rightarrow \exists u(wR_2u \wedge uEu')$.

Определение 8. Бисимуляцией двумя моделями $M = (W, R, \vec{P})$ и $M' = (W', R', \vec{P}')$ (где $\vec{P}$ и $\vec{P}'$ – семейства двуместных предикатов) называется непустое отношение $E \subset (W \times W) \times (W' \times W')$ такое, что для любых $w_1, w_2, v \in W$, $w_1', w_2', u' \in W'$ таких, что $(w_1, w_2)E(w_1', w_2')$, верно:
1) $\forall i(P_i(w_1, w_2) = P_i'(w_1', w_2'))$,
2) $w_1Rv \Rightarrow \exists v'(w_1'R'v' \wedge (v, w_2)E(v', w_2'))$,
3) $w_1'Ru' \Rightarrow \exists u(w_1Ru \wedge (u, w_2)E(u', w_2'))$.
4) $w_2Rv \Rightarrow \exists v'(w_2'R'v' \wedge (w_1, v)E(w_1', v'))$,
5) $w_2'Ru' \Rightarrow \exists u(w_2Ru \wedge (w_1, u)E(w_1', u'))$.

Теперь можно сформулировать следующие теоремы о характеризации.

Теорема 1. *Пусть C – класс всех (конечных) шкал-произведений, $\phi(x)$ – формула первого порядка от одной переменной в сигнатуре с двумя отношениями и семейством одноместных предикатов, тогда:*
$\phi(x)$ эквивалентно в моделях на шкалах класса C стандартному переводу бимодальной формулы тогда и только тогда, когда $\phi(x)$ сохраняется при бисимуляциях в классе C.

Теорема 2. *Пусть C – класс всех (конечных) шкал с одним отношением, $\phi(x,y)$ – формула первого порядка от двух переменных в сигнатуре с одним отношением и семейством двуместных предикатов, тогда:*
$\phi(x)$ эквивалентно в моделях на шкалах класса C квадратному переводу бимодальной формулы тогда и только тогда, когда $\phi(x)$ сохраняется при двойных бисимуляциях в классе C.

Теорема 3. *Пусть C – класс всех (конечных) шкал логики $K \times K$, $\phi(x)$ – формула первого порядка от одной переменной в сигнатуре с двумя отношениями и семейством одноместных предикатов, тогда:*
$\phi(x)$ эквивалентно в моделях на шкалах класса C стандартному переводу бимодальной формулы тогда и только тогда, когда $\phi(x)$ сохраняется при бисимуляциях в классе C.

Для доказательства теоремы 1 используется метод построения разверток моделей (на котором построено одно из доказательств [5,6] теоремы Ван Бентема-Розена), обобщенный на полимодальный случай. Теорема 2 может быть сведена к теореме 1 за счет связи между моделями в сигнатуре с двуместными предикатами и моделями на шкалах-произведениях. При доказательстве теоремы 3 основную сложность представляет конечный случай (в случае с произвольными шкалами класс является элементарным). При построении разверток в конечном случае используется то, что логика $K \times K$ обладает свойством финитной аппроксимируемости произведениями [7]. За счет этого удается для модели построить развертку, шкала которой ведет себя как шкала-произведение до необходимой для доказательства глубины, и затем достроить ее до модели, бимодально эквивалентной исходной.

Источники и литература

1) Goranko, V. and Otto, M., Model Theory of Modal Logics, in: Handbook of Modal Logic, edited by P. Blackburn, F. Wolter, and J. van Benthem, Elsevier 2006, pp. 255-325.
2) Gabbay, D. and Shehtman, V., Products of modal logics. part 1, Logic Journal of the IGPL 6 (1998), pp.~73–146.
3) Gabbay, D. and Shehtman, V., Products of modal logics. part 2: Relativised quantifiers in classical logic., Logic Journal of the IGPL 8 (2000), pp.~165–210.
4) Dawar, A. and Otto, M., Modal Characterisation Theorems over Special Classes of Frames, Annals of Pure and Applied Logic 161, 2009, pp.~1-42
5) Otto, M., Elementary Proof of the van Benthem-Rosen Characterisation Theorem, Technical Report 2342, Department of Mathematics, Darmstadt University of Technology (2004).
6) Otto, M., Modal and Guarded Characterisation Theorems over Finite Transition Systems, Annals of Pure and Applied Logic 130 (2004), pp. 173-205.
7) Gabbay, D., Kurucz, A., Wolter, F. and Zakharyaschev, M., Many-dimensional modal logics: theory and applications, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 148, Elsevier, 2003.