Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Графы ортогональности подмножеств матриц со специальными свойствами

Бахадлы Бахад Рафик-Оглы

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: bahad1@mail.ru

Определение 1. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Два элемента $r_1 \in R$ и $r_2 \in R$ называются *ортогональными*, если $r_1 r_2 = r_2 r_1 = 0$.

С каждым кольцом R можно связать *граф ортогональности* $O(R)$, множеством вершин которого являются все двусторонние делители нуля кольца R, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы кольца ортогональны.

Определение 2. Для множества $X \subset R$ в графе ортогональности $O(R)$ кольца R рассмотрим подграф $O(X)$, соответствующий данному множеству X, с множеством вершин $V(O(R)) \cap X$ и множеством ребер $S \subseteq E(O(R))$, где S — это в точности те рёбра, оба конца которых принадлежат множеству X.

В работе были изучены графы ортогональности подмножеств матриц со специальными свойствами и получены следующие основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле. Если* $\mathcal{T}_n$ *— множество триангулизуемых матриц в* $M_n(\mathbb{F})$, *то* $O(\mathcal{T}_2) = O(M_2(\mathbb{F}))$ *и диаметр* $\operatorname{diam} O(\mathcal{T}_n) = 4$ *для всех* $n \geq 3$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле. Если* $\mathcal{D}_n$ *— множество диагонализуемых матриц в* $M_n(\mathbb{F})$, *то* $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_3) = 5$ *и* $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_n) = 4$ *для всех* $n \geq 4$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле. Если* $\mathcal{E}_n$ *— множество идемпотентных матриц в* $M_n(\mathbb{F})$, *то* $\operatorname{diam} O(\mathcal{E}_3) = 5$ *и* $\operatorname{diam} O(\mathcal{E}_n) = 4$ *для всех* $n \geq 4$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле. Если* $\mathcal{K}_n$ *— множество* k*-потентных матриц в* $M_n(\mathbb{F})$, *то* $\operatorname{diam} O(\mathcal{K}_3) = 5$ *и* $\operatorname{diam} O(\mathcal{K}_n) = 4$ *для всех* $n \geq 4$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле. Если* $\mathcal{N}_n$ *— множество нильпотентных матриц в* $M_n(\mathbb{F})$, *то* $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_3) = 5$ *и* $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_n) = 4$ *для всех* $n \geq 4$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— поле. Если* T_n *— множество верхнетреугольных матриц в* $M_n(\mathbb{F})$, *то* $\operatorname{diam} O(T_n) = 4$ *для всех* $n \geq 3$.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 15-01-01132, МД-962.2014.1.