Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О проблеме распознавания расширений для пропозициональных исчислений

Боков Григорий Владимирович
Кандидат наук
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия
E-mail: bokovgrigoriy@gmail.com

Проблема распознавания расширений для пропозиционального исчисления состоит в ответе на вопрос: выводимо ли множество теорем этого исчисления из данного конечного множества формул с помощью операции modus ponens и подстановки?

Неразрешимость этой проблемы для классического исчисления высказываний впервые установлена Линиалом и Постом [6]. Глэдстоун [4] обобщил их результат на произвольные системы связок. Кузнецов [1] доказал неразрешимость для любого суперинтуиционистского исчисления. Булман и Тапия [3] доказали неразрешимость для импликативного фрагмента интуиционистского исчисления. Марчинковский [7] доказал неразрешимость для любого исчисления с одной аксиомой, не представимой в виде $A \to A$. Что вместе с результатом Тарского [8, стр. 59] доставляет неразрешимость для любого исчисления, содержащего формулы $x \to (y \to x)$ и $x \to (y \to ((x \to (y \to z)) \to z))$. Харроп [5] доказал неразрешимость для любого исчисления, из которого выводимы формулы $x \to (y \to x)$ и $x \to x$. Некоторые недавние обзорные результаты связанных проблем были получены Золиным [9] и Боковым [2].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Проблема распознавания расширений алгоритмически неразрешима для любого пропозиционального исчисления.*

Источники и литература

1) Кузнецов А. В. Неразрешимость общих проблем полноты, разрешимости и эквивалентности для исчислений высказываний. // Алгебра и логика, т. 2, № 4, стр. 47-66, 1963.

2) Bokov G. V. Undecidability of the problem of recognizing axiomatizations for propositional calculi with implication. // Logic Journal of the IGPL (Received 24 July 2014), 2015, doi: 10.1093/jigpal/jzu047.

3) Bollman D., Tapia M. On the recursive unsolvability of the provability of the deduction theorem in partial propositional calculi. // Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 13, no. 1, p. 124-128, 1972.

4) Gladstone M. D. Some Ways of Constructing a Propositional Calculus of Any Required Degree of Unsolvability. // Transactions of the American Mathematical Society, vol. 118, p. 192-210, 1965.

5) Harrop R. A Relativization Procedure for Propositional Calculi, with an Application to a Generalized Form of Post's Theorem. // Proceedings of the London Mathematical Society, vol. s3-14, no. 4, p. 595-617, 1964.

6) Linial Samuel, Post Emil L. Recursive unsolvability of the deducibility, Tarski's comleteness, and independence of axioms problems of the propositional calculus. // Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 55, p. 50, 1949.

7) Marcinkowski J. A Horn clause that implies an undecidable set of Horn clauses. // Selected papers of the 7th Workshop on Computer Science Logic (CSL '93), vol. 832, p. 223-237, 1994.

8) Tarski A., Corcoran J. Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938. — Hackett Publishing Company, Incorporated, 1983.
9) Zolin E. Undecidability of the Problem of Recognizing Axiomatizations of Superintuitionistic Propositional Calculi. // Studia Logica, vol. 102, p. 1021-1039, 2014.