Секция «Геометрия и топология»

Классификация высотных двумерных атомов с транзитивной на вершинах группой симметрий.

Пухов Дмитрий Николаевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: mlakgm@gmail.com

Пусть M^2 - гладкое компактное двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ -функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 : f(x) = k$,где $k \in \mathbb{R}\}$ - её особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне $(\{f = k\})$.

Определение 1. Атомом называется пара ($f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k)$) с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$. Атом называется ориентируемым, если эта поверхность ориентируема. Граф $f^{-1}(k)$ называется остовом атома. Два атома называются изоморфными, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов — в остов, а функцию переводит в функцию. Будем говорить, что атом ($f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k)$) порожден функцией f.

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f высотным, если существует такое вложение $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in g(M^2)$, где z — стандартная координата в пространстве R^3, т.е. z — функция высоты на $g(M^2)$. Также необходимо самостоятельное определение атома.

Определение 3. Атомом назовем "оснащенную" пару (P^2, K), где P^2 - компактная ориентированная поверхность с краем, K - непустой конечный связный граф, вложенный в P^2, вершины которого имеют степень 0 или 4, причем множество $P^2 \backslash K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0,1]$, $(S^1, 1) \subset \partial P^2$. Множество колец и их граничных окружностей разбито на два подмножества (белые и черные) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец и соответствующих окружностей на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K). Два атома считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм оснащенных пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Утверждение 1. Определения 1 и 3 эквивалентны.

Определение 3. Симметрией атома $X = (P^2, K)$ называется сохраняющий ориентацию и оснащение гомеоморфизм оснащенной пары (P^2, K) на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии, т.е. класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов оснащенной пары (P^2, K) на себя. Отметим, что при таком определении группа $Sym(X)$ симметрий атома $X = (P^2, K)$ дискретна.

Определение 4. Конечный связный граф Γ, некоторые ребра которого ориентированы, называется ориентированным f-графом, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра–петли.

Соответствующий f-граф строится по атому (P^2, K) следующим образом: в качестве неориентируемого ребра берется отрезок, соединяющий границы противоположных белых колец (см. рис. 1), а в качестве вершин — соответствующие концы отрезка. В качестве ориентированных ребер берутся примыкающие к вершинам дуги белых колец, с соответствующей ориентацией.

В рамках данной работы получена классификация высотных двумерных атомов с транзитивной на вершинах группой симметрий в терминах f-графов.

Источники и литература

1) И. М. Никонов, Н. В. Волчанецкий, “Максимально симметричные высотные атомы” //2013
2) Мантуров В.О., “Бифуркации, атомы и узлы”, //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2000.
3) Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т., “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия,”// Матем. сборник, 199 (9), сс. 3–96 (2008).
4) Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 444 с., (1999).
5) Ошемков А.А. “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей,” // М.: Наука, “Труды математического института им. В.А. Стеклова” сс. 131–140 (1994).
6) Фоменко А. Т., “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости” // Известия А.Н. СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307. Объем 2 п.л.
7) Фоменко А. Т., “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем” // УМН, 1989, т.44, вып. 1 <165>, с.145-173. Объем 2 п.л.
8) Фоменко А. Т., “Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многооб- разиях” // Функц. анализ и его приложения, 1991, т.25, вып.4, с. 23-25 Объем 1 п.л.
9) Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т., “Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники,” // Изд-во Московско- го университета, в сборн. “Соврем. пробл. матем. и механ.” под ред. А. Т. Фоменко, сс. 58–97 (2009).