Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Весовое пространство банаховозначных аналитических функций

Нестеров Никита Юрьевич

Студент (магистр)

Южный федеральный университет, Факультет математики, механики и компьютерных наук, Кафедра математического анализа, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: nikitanesterov2006@rambler.ru

Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $\mathfrak{B}$ — произвольное банахово пространство. Через $\mathcal{A}(G, \mathfrak{B})$ обозначим пространство всех аналитических в G функций со значениями в $\mathfrak{B}$, наделенное топологией $\tau_{\mathtt{co}}$ равномерной сходимости на компактах. Весом будем называть некоторую фиксированную функцию $v : G \to (0, \infty)$. Введём весовое подпространство $\mathcal{A}(G, \mathfrak{B})$, задаваемое весом v:

$$\mathtt{A}_v(G) := \left\{ f \in \mathcal{A}(G, \mathfrak{B}) : \|f\|_v = \sup_{z \in G} \frac{\|f(z)\|_{\mathfrak{B}}}{v(z)} < \infty \right\}.$$

В работе для пространства $\mathtt{A}_v(G)$ изучаются вопросы нетривиальности, размерности, непрерывности и компактности вложений. Ранее в [1] аналогичные проблемы исследовались в случае $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$.

Приведём некоторые из полученных результатов. Обозначим через $n(f)$ число нулей нетривиальной функции $f \in \mathcal{A}(G, \mathfrak{B})$ с учётом их кратностей.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

($\mathcal{Y}1$) $\mathtt{A}_v(G)$ *имеет размерность* $p \in \mathbb{N}$;

($\mathcal{Y}2$) $\mathtt{A}_v(G) = \operatorname{span}\left\{ z^k \cdot f_0(z) :\ k = 0, \dots, p-1 \right\}$, *где* f_0 *голоморфна и не имеет нулей в* G;

($\mathcal{Y}3$) $n(g) \leqslant p-1$ *для всех* $g \in \mathtt{A}_v(G) \setminus \{0\}$ *и существует* $f \in \mathtt{A}_v(G)$ *такая, что* $n(f) = p-1$.

Далее, для веса v введём ассоциированный с ним вес $\widetilde{v}(z) := \sup\left\{ \big\|f(z)\big\|_{\mathfrak{B}} : f \in \mathtt{A}_v(G),\, \|f\|_v \leqslant 1 \right\}$, $z \in G$ (см. [2]).

Теорема 2. *Пусть* v, w *- веса. Вложение* $\mathtt{A}_v(G) \subset \mathtt{A}_w(G)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{z \in G} \dfrac{\widetilde{v}(z)}{w(z)} < \infty$. *При этом вложение всегда является непрерывным.*

Теорема 3. *Для компактности вложения* $\mathtt{A}_v(G)$ *в* $\mathtt{A}_w(G)$ *достаточно, чтобы* $\lim\limits_{z \to \partial G} \dfrac{\widetilde{v}(z)}{w(z)} = 0$. *В случае, когда* $G \neq \mathbb{C}$ *и дополнение* G *не имеет одноточечных компонент, данное условие является и необходимым.*

Общий критерий компактности вложения формулируется следующим образом (см. [3]).

Теорема 4. $\mathtt{A}_v(G)$ *компактно вложено в* $\mathtt{A}_w(G)$ *тогда и только тогда, когда любая ограниченная последовательность* $\{f_n\} \subseteq \mathtt{A}_v(G)$, *такая, что* $f_n \to 0$ *в топологии* $\tau_{\mathtt{co}}$, *сходится к нулю в* $\mathtt{A}_w(G)$.

Источники и литература

1) Abanin A.V., Pham Trong Tien. Painleve null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces // Studia Math. 2012. V. 213, Issue 2. P. 169-187.

2) Bierstedt K.D., Bonet J., Taskinen J. Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math. 1998. V. 127. P. 137-168.

3) Garcia D., Maestre M., Sevilla-Peris P. Weakly compact composition operators between weighted spaces // Note di Mat. 2005/2006. V.25. P. 205-220.