Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О вложении разных метрик обобщенных классов Никольского

Исмагилов Тимур Фаритович

Выпускник (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: tismagilov@mail.ru

Хорошо известен класс функций Никольского $H_p^{\vec{r}}$ и теоремы вложения для него(см. [1]). В этой работе вводятся классы функций $F_2(1)H_p^{\vec{r}}$, являющиеся обобщением класса $H_p^{\vec{r}}$, и для одного из них приводится теорема вложения разных метрик.

Будем писать, что $f \in L_p$, если $f(x_1, \dots, x_n)$ - измеримая функция n переменных, 2π - периодическая по каждому из них и такая, что $||f||_p < \infty$, где

$$||f||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} |f|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p}, \text{ если } 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_p = \underset{x_i \in [0,2\pi],\, i=1,\dots,n}{supvrai} |f|, \text{ если } p = \infty.$$

Через $\omega_{k_{i_1} \dots k_{i_s}}(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p$ обозначим s-мерный($1 \le s \le n$) модуль гладкости порядка k_{i_j} ($k_{i_j} \in \mathbb{N}$) по переменной x_{i_j} функции $f \in L_p$, то есть

$$\omega_{k_{i_1} \dots k_{i_s}}(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p = \sup_{h_{i_1} \le \delta_{i_1}, \dots, h_{i_s} \le \delta_{i_s}} \|\Delta_{h_{i_1} \dots h_{i_s}}^{k_{i_1} \dots k_{i_s}} f\|_p,$$

где $\Delta_{h_i}^{k_i} f = \sum\limits_{\nu_i=0}^{k_i} (-1)^{k_i - \nu_i} C_{k_i}^{\nu_i} f(x_1, \dots, x_i + \nu_i h_i, \dots, x_n)$, $\Delta_{h_{i_1} \dots h_{i_s}}^{k_{i_1} \dots k_{i_s}} f = \Delta_{h_{i_1}}^{k_{i_1}} \varphi$, $\varphi = \Delta_{h_{i_2} \dots h_{i_s}}^{k_{i_2} \dots k_{i_s}} f$.

Напомним, что $f \in H_p^{\vec{r}}$, если $r = \{r_1, \dots, r_n\}$, $r_i > 0$, $f \in L_p$, $\omega_{k_i}(f, \delta_i) \le c_1 \delta_i^{r_i}$, $\forall i = 1, \dots, n$, где $k_i > r_i$, $\delta_i \in (0, 1]$, постоянная c_1 не зависит от f и δ_i.

Теорема Никольского. Если $f \in H_p^{\vec{r}}$, $1 \le p < q \le \infty$, $r_1 = \dots = r_n = r > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, то $f \in H_q^{\vec{\rho}}$, где $\rho_1 = \dots = \rho_n = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Рассмотрим классы функций $F_2(1)H_p^{\vec{r}}$, являющиеся обобщением класса $H_p^{\vec{r}}$.
Будем писать, что $f \in F_2(1)H_p^{\vec{r}}$, если $r = \{r_1, \dots, r_n\}$, $r_i > 0$, и выполнены условия:
1) $f \in L_p$,
2) $\omega_{k_i}(f, \delta_i)_p \le c_2 \delta_i^{r_i}$, $\forall i = 1, \dots, n$,
3) $\omega_{k_1 k_i}(f, \delta_1, \delta_i)_p \le c_3 \delta_1^{r_1} \delta_i^{r_i}$, $\forall i = 2, \dots, n$,
где $k_i > r_i$, $\delta_i \in (0, 1]$, постоянные c_2, c_3 не зависят от f и δ_i.

Теорема. Если $f \in F_2(1)H_p^{\vec{r}}$, $1 \le p < q \le \infty$, $r_1 = \dots = r_n = r > (n-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, то $f \in F_2 H_p^{\vec{\rho}}$, где $\rho_1 = r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $\rho_2 = \dots = \rho_n = r - (n-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект №15-01-01236 и программы “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-3682.2014.1).

Источники и литература

1) Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1977.