Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Инвариантная мера для многомерных теорем типа Понселе

Авксентьев Евгений Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра общих проблем управления, Москва, Россия
E-mail: avksentjev@mail.ru

Мы даем простое доказательство общего принципа замыкания для сфер в пространстве $\mathbb{R}^d$ с помощью введения новой инвариантной меры на окружности. Этот принцип замыкания сформулирован в работе [3] и является многомерным обобщением теоремы Эмха. Из него, например, следуют теорема Понселе для квадрик, теоремы о зигзаге и Штейнера.

Заключается он в следующем. Рассмотрим семейство M сфер, касающихся d данных сфер в $\mathbb{R}^d$. Если существует цепь из n сфер семейства M такая, что каждая пара соседних сфер пересекается на данной окружности δ, то утверждается, что тогда существует бесконечно много таких цепей из n сфер. Более того, для каждой точки окружности δ существует замкнутая цепь с началом в ней.

Поясним это на примере трехмерного случая. На рисунке изображены три сферы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в $\mathbb{R}^3$. Через точку x на окружности δ проводится сфера ω, касающаяся $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Она вторично пересекает окружность δ в еще одной точке y, через которую можно провести другую сферу, касающуюся сфер $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д. Если этот процесс замнется через n шагов, то он будет замыкаться для любой начальной точки и тоже через n шагов.

Пусть существует такая мера $m(\cdot)$ на δ, что все ориентированные дуги $\breve{xy} \subset \delta$, имеют одно и то же значение $m(\breve{xy}) = \widetilde{m}$. Тогда описанный выше процесс замыкается через n шагов если и только если число $n\widetilde{m}$ является целым кратным $m(\delta)$. Плотность $\rho = m'$ инвариантной меры характеризуется соотношением $\rho(x)dx = \rho(y)dy$, где dx и dy – это ориентированные длины маленьких дуг после шевеления сферы ω, касающейся сфер $\omega_1, \ldots, \omega_d$. Если функция $\rho\colon \delta \to \mathbb{R}_+$ обладает этим свойством, то $m(\breve{xy}) = \int_x^y \rho(s)ds$ является инвариантной мерой на окружности δ (интегрирование по всей дуге $\breve{xy}$). Само существование такой меры влечет свойство замыкания.

На окружности δ мы построим меру вида

$$\mu(A) = \int\limits_A \frac{dl}{\sqrt{T(\mathbf{x})}} \ ,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, интегрирование ведется по дугам A окружности δ, а функция $T(\mathbf{x})$ алгебраически выражается через квадратичные формы $\sigma_1(\mathbf{x}), \ldots, \sigma_d(\mathbf{x})$ сфер $\omega_1, \ldots, \omega_d$.

Для плоского случая получим инвариантную меру для теоремы Эмха. Мы покажем, что частными случаями новой меры являются хорошо известные инвариантные меры классических теорем о замыкании: Понселе [1], о зигзаге [2], Штейнера.