Секция «Математика и механика»

Оценки скорости сходимости в системе броуновских частиц с синхронизацией

Карпушин Владимир Владимирович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: vovakarpushin@yandex.ru

В приложениях, таких как беспроводные сенсорные сети, распределенные вычисления и пр. используются различные модели синхронизации. С математической точки зрения удобным и естественным средством при построении вероятностных моделей синхронизации являются системы стохастических частиц с синхронизацией (см. [1,2]). Одной из таких моделей является система броуновских частиц с синхронизацией.

Имеется система N взаимодействующих частиц $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbf{R^N}$ и последовательность случайных моментов времени: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$. На интервалах (τ_{n-1}, τ_n) движение частиц с координатами $x_1, \dots, x_N$ описывается $N-$мерным стандартным броуновским движением, независимым от $\{\tau\}_{n=1}^{\infty}$. В момент τ_n пара различных частиц (i_n, j_n) выбирается случайным образом, вероятность выбрать такую упорядоченную пару равна $\frac{1}{N(N-1)}$, и частица j_n прыгает к частице i_n Интервалы $\Delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ между моментами синхронизации независимы и одинаково распределены по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$. В начальный момент времени все частицы находятся в нуле $x_i(0) = 0 \ \forall i = 1, \dots, N$.

Для любого случайного вектора $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbf{R^N}$, обозначим через P_z закон распределения вектора z. Оказывается [1], что семейство вероятностных мер $P_{x(t)}$ не может иметь предела при $t \to \infty$. Рассмотрим скорректированный процесс:

$$y_i(t) = x_{i+1}(t) - x_1(t), \quad i = 1 \dots N-1$$

Тогда

$$P_{y(t)} \to \mu \quad (t \to \infty)$$

где μ -предельная вероятностная мера процесса $y(t) = (y_1(t), \dots, y_{N-1}(t))$.

В настоящей работе оценивается скорость данной сходимости. Рассмотрим расстояние по вариациями между вероятностными мерами μ и π:

$$d(\mu, \pi) = \sup_B |\mu(B) - \pi(B)|$$

где супремум берется по всем борелевским множествам $B \subseteq \mathbf{R^{N-1}}$.
Доказано, что существуют такие константы C_1 и C_2, зависящие от N, что выполнено:

$$C_2(N)\ t^{-\frac{3}{2}}\ e^{-\frac{2\lambda t}{N^2-N}} \le d(P_{y(t)}, \mu) \le C_1(N)\ e^{-\frac{2\lambda t}{N^2-N}}$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Д. Маните за постановку задачи и внимание в работе.

Литература

1. Anatoly Manita. Brownian particles interacting via synchronizations. Communications in Statistics - Theory and Methods. V. 40, N 19-20. P. 3440-3451 (2011)
2. A. Manita, Clock synchronization in symmetric stochastic networks, Queueing Systems, Volume 76, Issue 2, pp 149-180 (2014)