Секция «Математика и механика»

Оптимизация границ отклонений для двумерных BR-множеств

Абросимова Альбина Андреевна
Аспирант
Владимирский государственный университет, Физико-математический факультет, Владимир, Россия
E-mail: Pincet88@mail.ru

Пусть задана орбита движения точки x_0, $r(\alpha, i, T) = \sharp\{j : 0 \le j < i, \{j\alpha\} \in T\}$ — функция считающая количество попаданий точек в область T и $\delta(i) = r(\alpha, i, T) - is_T$ — отклонение считающей функции $r(\alpha, i, T)$ от ожидаемой величины is_T, где i — общее количество точек орбиты, s_T — площадь области T.

Тогда множество T называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set), если существует такая константа C, что выполняется неравенство $|\delta(\alpha, i, T)| \le C$ для всех i.

Для исследования этих множеств в [3] был найден новый способ. В работе автора [1] были построены множества ограниченного остатка на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, а также получены точные границы отклонений для этих множеств.

Разбиение тора $\mathbb{T}^2$ осуществляется на три области

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2_0 \sqcup \mathbb{T}^2_1 \sqcup \mathbb{T}^2_2, \tag{1}$$

являющиеся множествами ограниченного остатка. Разбиение (1) задается двумя параметрами c и t, где $c = (c_1, c_2)$ принадлежит области

$$C_{con} = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \ge 0, c_1 + c_2 \le 1\}, \tag{2}$$

и $0 < t < 1$. Тогда точные оценки остаточных членов $\delta_k(i), k = 0, 1, 2$ для множеств (1) определяются неравенствами

$$\begin{gathered} -c_1 - c_2 \le \delta_0(i) \le 2, \\ -1 \le \delta_1(i) \le c_1, \\ -1 \le \delta_2(i) \le c_2 \end{gathered} \tag{3}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

Из неравенств (3) видно, что границы отклонений или остаточных членов $\delta_k(i)$ зависят только от выбора параметра c. Возникает естественный вопрос: как подобрать c_1 и c_2 так, чтобы одновременно сделать как можно меньше границы всех трех отклонений $\delta_k(i)$.

Для минимизации границ отклонений будем рассматривать отклонения $\delta_k(i)$ как координаты трехмерного вектора

$$x = (x_0, x_1, x_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2), \tag{4}$$

а также выберем метрику трехмерного пространства $d_\theta(x)$, в которой будет проводиться оптимизация векторов (4). Будем рассматривать метрики вида

$$d_\theta(x) = (|x_0|^\theta + |x_1|^\theta + |x_2|^\theta)^{\frac{1}{\theta}},$$

где $1 \leq \theta \leq \infty$, а $|\ |$ — обозначает абсолютную величину.

Назовем
$$\Delta_\theta(c) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_2(\delta(i))$$
верхней границей векторного отклонения $\delta(i)$ в метрике $d_\theta(x)$ при фиксированном c. Тогда
$$\Delta_\theta = \inf_{c \in C_{con}} \Delta_\theta(c)$$
— нижняя граница $\Delta_\theta(c)$ по всем c из области C_{con}, определенной в (2).

Если выбрать $\theta = 2$, то получим обычную евклидову метрику
$$d_2(x) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}. \tag{5}$$
Относительно величины нижней границы $\Delta_2(c)$ в метрике $d_2(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ задают трехмерный вектор x, и пусть его длина $d_2(x)$ определена в (5). Тогда выполняется равенство*
$$\Delta_2 = \sqrt{2}.$$
Полученное равенство достигается при $c = (1, 0)$ и $c = (0, 1)$.

Аналогичные оценки получены в [2] для метрик $d_1(x) = |x_0| + |x_1| + |x_2|$ и $d_\infty(x) = \max(|x_0|, |x_1|, |x_2|)$.

Литература

1. Абросимова А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе.// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2012.№5(124). Вып. 26.С. 5–11.

2. Абросимова А. А., Блинов Д. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных множеств ограниченного остатка.// Научные ведомости БелГУ. Серия:Математика. Физика. 2013.№26(169). Вып. 33.С. 5–13.

3. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества огранниченного остатка. // Записки научных семинаров ПОМИ. —2011.—№ 392. —С. 95–145.