Секция «Математика и механика»

Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами

Донцова Марина Владимировна
Аспирант
Нижегородский государственный педагогический университет, факультет естественных, математических и компьютерных наук, Нижний Новгород, Россия
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

В работе [3] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)+(au(t,x)+bv(t,x))\partial_x u(t,x)=0,\\ \partial_t v(t,x)+(cu(t,x)+gv(t,x))\partial_x v(t,x)=0,\end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ - неизвестные функции, a, b, c, g - известные положительные константы с начальными условиями:

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ v(0,x)=\varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T=\{(t,x)\,|0\le t\le T, x\in(-\infty,\infty), T>0\}$.

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)+(au(t,x)+bv(t,x)+h_1)\partial_x u(t,x)=f_1(t,x)\\ \partial_t v(t,x)+(cu(t,x)+gv(t,x)+h_2)\partial_x v(t,x)=f_2(t,x),\end{cases} \tag{3}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ - неизвестные функции, a, b, c, g, h_1, h_2 - известные положительные константы, f_1, f_2 - известные функции.

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента определяем условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида (3) с начальными условиями (2) в области Ω_T.

С помощью с метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [3], [5] :

$$w_1(s,t,x)=\varphi_1(x-\int_0^t(aw_1+bw_3+h_1)d\tau)+\int_0^s f_1(\tau,x-\int_\tau^t(aw_1+bw_3+h_1)d\nu)d\tau, \tag{4}$$

$$w_2(s,t,x)=\varphi_2(x-\int_0^t(cw_4+gw_2+h_2)d\tau)+\int_0^s f_2(\tau,x-\int_\tau^t(gw_2+cw_4+h_2)d\nu)d\tau, \tag{5}$$

$$w_3(s,t,x)=w_2(s,s,x-\int_s^t(aw_1+bw_3+h_1)d\tau),\ w_4(s,t,x)=w_1(s,s,x-\int_s^t(cw_4+gw_2+h_2)d\tau). \tag{6}$$

Также как в работах [1] - [5], для системы интегральных уравнений (4) - (6) доказывается, что функции, являющиеся решением системы уравнений (4) - (6), дают решение исходной задачи (3), (2) на Ω_{T_0}, $T_0\le T$, где T_0 - константа, определяемая через исходные данные.

С помощью метода последовательных приближений для системы интегральных уравнений (4) - (6) доказывается локальное существование и единственность непрерывного, ограниченного решения вместе с частными производными первого порядка. Доказательство нелокальной разрешимости опирается на глобальные оценки.

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Если* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R^1),\ i = 1,2,\ f_1(t,x), f_2(t,x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, *и выполняются условия:*

1) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ g > 0,\ h_1 > 0,\ h_2 > 0$,

2) $\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0$ на R,

3)$\partial_x f_1 \geq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0$ на Ω_T.

Тогда для любого $T > 0$ *существует единственное решение задачи Коши* (3), (2) $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (4) - (6).

Литература

1. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Киров: ВятГГУ. Вып. 14. 2012. С. 34 - 41.

2. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Киров: ВятГГУ. Вып. 15. 2013. С. 52 - 59.

3. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки. 2013. №3 (177). С. 190 - 201.

4. Донцова М.В. Условия локальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки. Н. Новгород: НИУ РАНХИГС, 2013.

5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379. №1. С. 16 - 21.