Секция «Математика и механика»

О парах относительно эллиптических операторов

Сычев Илья Владимирович
Аспирант
Московский государственный областной гуманитарный институт, факультет математики и физики, Орехово-Зуево, Россия
E-mail: sychev2008@inbox.ru

В настоящей заметке рассматривается постановка задачи об относительном индексе пары операторов, не обязательно являющихся эллиптическими.

Пусть X – гладкое компактное многообразие, D=D(x,/x^i) - дифференциальный оператор, действующий на гладких функциях на X со значениями в $\mathbf{R}^m$, где x=(x^1,. . . ,x^n) є X, ξ=(ξ_1,. . . ,ξ_n), ξ_i= /x^i, s$_D$ =D(x,ξ) – символ оператора D.

Напомним, что D эллиптичен, если для всех x є X, s$_D$(x,ξ) обратим при всех ξ0. Знаменитая теорема Атьи-Зингера об индексе утверждает, что аналитический индекс ind(D), т.е. разность размерностей ядра и коядра оператора D, конечен и равен топологическому индексу его символа, т.е., определяется его классом [s$_D$] в K-группе K(X), [1].

Рассмотрим пару дифференциальных операторов D$_1$ и D$_2$ с символами s$_1$ и s$_2$ соответственно. Для x є X и ξ0 обозначим через L$_x$,ξподпространствов$\mathbf{R}^m$, на котором s$_1$=s$_2$.

Определение. Пара D$_1$, D$_2$ называется относительно эллиптической, если ограничения s$_1$ и s$_2$ на ортогональное дополнение к L$_{x,}$$\xi$являютсяортогональнымиоператорами.

В частности, любые два эллиптических оператора, символы которых являются ортогональными операторами, а также любые два совпадающих оператора, образуют относительно эллиптическую пару.

Заметим, что можно свести определение относительно эллиптических пар к равенствам

(s$_1$*s$_1$-1)(s$_1$-s$_2$)=(s$_1$-s$_2$)(s$_1$*s$_1$-1)=0 и (s$_2$*s$_2$-1)(s$_1$-s$_2$)=(s$_1$-s$_2$)(s$_2$*s$_2$-1)=0, (1)

выполненным тождественно по x и ξ0. Здесь s* обозначает оператор в $\mathbf{R}^m$, сопряженный к s.

Теорема. *Пары матричнозначных функций s_1, s_2, удовлетворяющих соотношениям (1), корректно определяют элемент [s_1, s_2]є K(X).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4 в [2].

Это утверждение позволяет строить топологический индекс пары относительно эллиптических операторов. Оно же работает и в случае пар псевдодифференциальных операторов. В следующих работах планируется определить также аналитический индекс для таких пар и доказать относительный вариант теоремы о совпадении индексов.

Литература

1. А.С.Мищенко. Векторные расслоения и их приложения. М.: Наука, 1984.

2. V.M.Manuilov. Weakening idempotency in K-theory, arXiv:1304.2650.