Секция «Математика и механика»

Два условия конечности в крученой К-теории.

Герасимова Мария Алексеевна
Студент
МГУ - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: mari9gerasimova@mail.ru

В докладе будет рассказано о двух теориях индекса и связи между ними.
В своей работе В.Матаи, Р. Мелроуз и И. Зингер разработали теорию индекса для проективных семейств псевдодифференциальных операторов. Иначе говоря, такое семейство $\{D_b, b \in X\}$ на слоях расслоения

$$\phi : M \to X$$

с базой X, типичным слоем F, -это набор локально эллиптических семейств для открытого покрытия базы X, действующих на конечномерных векторных расслоениях фиксированного ранга. Проективные векторные расслоения определеяют класс, класс Диксмье-Дуади, $\Theta \in H^3(X, \mathbb{Z})$. Тогда при предположении, что $\Theta \in TorH^3(X, \mathbb{Z})$, можно определить аналитических и топологических индекс D_b как элементы крученой K-теории со скручивающим элементом Θ, и они равны.
В.Нистор и Е. Троицкий в своей работе рассматривают семейства эллиптических операторов, инвариантных под действием семейства групп Ли. Операторы, инвариантные относительно действия семейства групп Ли $\mathcal{G} \to B$, будем называть калибровочно-инвариантными.
Для определения калибровочно-эквивариантного индекса необходимо определить и изучить свойства групп $K^i_{\mathcal{G}}(Y)$ калибровочно-эквивариантной K-теории для любого локально-тривиального расслоения $Y \to B$, на котором $\mathcal{G}$ действует гладко, поскольку они являются естественной областью значений для индекса калибровочно-инвариантных семейств эллиптических операторов. Оказывается, что эти группы удовлетворяют обычным свойствам групп эквивариантной K-теории, однако возникают новые интересные свойства, связанные с тем, что расслоение $\mathcal{G} \to B$ не тривиально. В условиях *конечной голономии* эти группы устроены хорошо. Более того, если $C^*(\mathcal{G})$ -обертывающая C^*-алгебра расслоения компактных групп Ли, то $K^j_{\mathcal{G}}(B) \cong K_j(C^*(\mathcal{G}))$, если $\mathcal{G} \to B$ удовлетворяет условию конечной голономии.Алгебра $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ изоморфна прямой сумме полей конечномерных матричных алгебр над накрытием над B.
Мы доказываем, что класс Диксмье-Дуаиди этих полей может быть получен из единственного класса в $H^2(B, Z(G) \cap G'))$, где G' -коммутант. Более точно, если $\hat{B}$ -универсальное накрытие над B и $B' = \hat{B} \times_{\pi_1(B,b_0)} (Aut(G)/Aut_0(G))$, пусть

$$f_\sigma : B' \to B_\sigma = B \times_{\pi_1(B,b_0)} (Aut(G)/Aut_0(G))\sigma.$$

В случае когда $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям конечной голономии препятствие $\chi' \in H^2(B', Z(G) \cap G')$ и инвариант Диксмье-Дуади связаны следующим образом:

$$(f_\sigma)^*(f_*(\chi_\sigma)) = \sigma_*(\chi'),$$

где $\sigma_* : H^2(B', Z') \to H^2(B', \mathbb{Z}/d_\sigma\mathbb{Z})$. и $f_* : H^2(B_\sigma, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \to TorH^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$.
Тем самым, установлена связь между условиями конечной голономии для групп калибровочно-эквивариантной K-теории и условием принадлежности $TorH^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$.

Литература

1. V. Mathai, R., B, Melrose, I., M, Singer, The index of projective families of elliptic operators. Geometry and Topology, volume 9, 2005, pp.341-373

2. V., Nistor, E., Troitsky, An index for gauge-invariant operators and the Dixmier-Douady invariant. Trans. Amer. Math. Soc., 356 (2004) No.1, 185-218.

3. V. Nistor, E. Troitsky, The Thom isomorphism in gauge-equivariant K-theory. In: C*-algebras and elliptic theory, Birkhäuser Trends in Math. series, 2006, pp.213-245

4. V. Nistor, E. Troitsky, Index Theorem for gauge-equivariant families. Preprint, 2012.