Секция «Математика и механика»

Инварианты Фоменко-Цишанга в задаче о движении неоднородного динамически симметричного эллипсоида вращения на гладкой плоскости

Сечкин Георгий Михайлович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ego-rish@ya.ru

В докладе будет рассмотренна задача о движении неоднородного динамически симметричного эллипсоида вращения на гладкой плоскости.
Эта задача в определенном смысле представляет собой интегрируемое обобщение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.
Система уравнений описывающих движение тела обладает полным набором интегралов:
1) $\Gamma = \gamma^2$ - геометрический интграл, выражает постоянство суммы квадратов проекций единичного вектора.
2) $K = (\bar{M}, \bar{\gamma})$ - проекция кинетического момента на вертикальную ось связана с инвариантностью вращений тела относительно вертикали.
3) Уравнения Гамильтона имеют вид обобщенных уравнений Кирхгофа:
$\acute{\bar{M}} = [\bar{M}; \frac{\partial H}{\partial \bar{M}}] + [\bar{\gamma}; \frac{\partial H}{\partial \bar{\gamma}}],\ \acute{\bar{\gamma}} = [\bar{\gamma}; \frac{\partial H}{\partial \bar{M}}],$
$H = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\bar{M}, \bar{M}\rangle + mgz$; Где матрица $\mathbf{A}$ - симметрическая матрица, зависящая от параметров. Канонические импульсы вводятся так: $\bar{M} = \mathbf{A}^{-1}\bar{\omega}$, для нашего случая, как было показано в работе М.Ю. Ивочкина[2] гамильтониан имеет следующий вид:
$H = \frac{1}{2(J_1 + a(\gamma_1^2+\gamma_2^2))}\left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{a(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2)^2}{J_1}\right) + \frac{M_3^2}{2J_3} + +mg\left((b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2)^{1/2} + s\gamma_3\right)$, где $a = \frac{m(b_3^2-b_1^2)^2\gamma_3^2}{b_1^2+(b_3^2-b_1^2)\gamma_3^2}$
А матрица $\mathbf{A}$ такая:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{J_1 + a\gamma_1^2}{J_1(J_1+a(\gamma_1^2+\gamma_2^2))} & \frac{a\gamma_1\gamma_2}{J_1(J_1+a(\gamma_1^2+\gamma_2^2))} & 0 \\ \frac{a\gamma_1\gamma_2}{J_1(J_1+a(\gamma_1^2+\gamma_2^2))} & \frac{J_1 + a\gamma_2^2}{J_1(J_1+a(\gamma_1^2+\gamma_2^2))} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{pmatrix}$$

4) Дополнительный интеграл Лагранжа: $M_3 = J_3\omega$, следует из явного вида матрицы $\mathbf{A}$

Твердое тело обладает шестью степенями свободы, рассмотрим отображение момента $F = (H, M_3) : M^4_{1,k} \to \mathbf{R}^2$ - зафиксируем значение двух интегралов площадей и геометрический. Получится 4-х мерное многообразие $M^4_{1,k}$, для изучения его топологии расслоим его на 3-х мерные многообразия $Q^3_{h,k} = \{H = h, K = k, \Gamma = 1\}$, фиксируя еще один интеграл энергию. Полученные изоэнергитические поверхности по теореме Лиувилля представляют собой расслоение торов. Для изучения этого слоения Анатолий Тимофеевич Фоменко предложил аппарат инвариантов так называемых меченых молекул, подробнее об этом написано в книге "Интегрируемые гамильтоновы системы"[1]. На докладе будет представленны молекулы, указаны метки на ребрах, а также будет небольшой рассказ о способах вычисления.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы, т.1, 2 Издательский дом Удмурдский университет 1999.

2. Ивочкин М.Ю. Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости, Математический сборник, стр. 85-104, т. 199, №6.

Слова благодарности

Хочу выразить глубочайшую благодарность своим научным руководителям Анатолию Тимофеевичу и Александру Владиленовичу за поставленную задачу, многочасовые обсуждения, подбор литературы, проявленное внимание, а также за моральную поддержку.
Елене Александровне Кудрявцевой за важные комментарии, помощь в разборе доказательств.
Андрею Александровичу Ошемкову за помощь в подборе литературы, а также за ценные замечания.
Антону Михайловичу Изосимову за помощь в подборе литературы, в том числе на иностранных языках.
Сотрудникам кафедр Дифференциальной геометрии и Теоретической механики за обсуждения и комментарии.