Секция «Математика и механика»

Необходимые условия вложимости в классе голоморфных отображений круга в себя с вещественными коэффициентами

Кудрявцева Ольга Сергеевна
Кандидат наук
Волжский гуманитарный институт (филиал) Волгоградского государственного университета, экономико-математический факультет , Волжский, Россия
E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

Пусть $\mathfrak{P}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ представляет собой топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторая подполугруппа полугруппы $\mathfrak{P}$.

Определение 1. *Под однопараметрической полугруппой в* $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$ *понимается непрерывный гомоморфизм* $t \mapsto f^t$, *действующий из аддитивной полугруппы* $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ *в полугруппу* $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$.

Элементы f^t, $t \geqslant 0$, однопараметрической полугруппы называются *дробными итерациями* функции $f = f^1$.

Определение 2. *Функция* $f \in \mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$ *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$, *если существует такая однопараметрическая полугруппа* $t \mapsto f^t$ *в* $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$, *что* $f^1 = f$.

Требование, чтобы итерации обладали теми же свойствами, что и сама функция, естественно и связано с приложениями.

Обозначим через $\mathfrak{P}_r[0]$ совокупность функций из $\mathfrak{P}$, сохраняющих начало координат и имеющих вещественные коэффициенты разложения в ряд Тейлора в окрестности нуля, т. е. $\mathfrak{P}_r[0]$ – совокупность голоморфных отображений $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, удовлетворяющих следующим условиям: $f(0) = 0$ и производные $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$.

В работе найдены некоторые необходимые условия вложимости функции $f \in \mathfrak{P}_r[0]$ в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$. Эти условия сформулированы в терминах оценок начальных тейлоровских коэффициентов функции f, что делает их наглядными и легко проверяемыми.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \in \mathfrak{P}_r[0]$ *и вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{P}_r[0]$. *Тогда*

$$\begin{aligned} 0 <&c_1 \leqslant 1, \\ -2c_1(1-c_1) \leqslant&c_2 \leqslant 2c_1(1-c_1), \\ \frac{1}{c_1}\,c_2^2 - c_1\left(1-c_1^2\right) \leqslant&c_3 \leqslant \frac{1-3c_1}{2c_1\,(1-c_1)}\,c_2^2 + c_1\left(1-c_1^2\right). \end{aligned}$$

Установлено, что полученные оценки коэффициентов лучше соответствующих точных оценок в классе ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами. Сравнение с оценками в данном классе связано с тем, что необходимым условием вложимости функции является её однолистность.

Дано описание экстремальных функций в задаче об оценке третьего коэффициента функций, допускающих вложение в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$. Решение приводится в терминах функции Кёнигса [1, гл. VI, § 44], [2].

Теорема 2. *Пусть* $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \in \mathfrak{P}_r[0]$ *отлична от тождественного преобразования и вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{P}_r[0]$. *Справедливы следующие утверждения:*

1)

$$c_3 = \frac{1 - 3c_1}{2c_1\,(1 - c_1)}\, c_2^2 + c_1\left(1 - c_1^2\right)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(z) = F^{-1}\left(c_1\, F(z)\right),$$

где F *– функция Книгса, определяемая по формуле*

$$F(z) = \frac{z}{(1+z)^{1-\lambda}\,(1-z)^{1+\lambda}}\,, \quad \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}\,.$$

2)

$$c_3 = \frac{1}{c_1}\, c_2^2 - c_1\left(1 - c_1^2\right)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(z) = F^{-1}\left(c_1\, F(z)\right),$$

где F *– функция Кёнигса, определяемая по формуле*

$$F(z) = \frac{z}{1 - 2\lambda z + z^2}\,, \quad \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}\,.$$

Литература

1. Валирон Ж. Аналитические функции. М., 1957.

2. Горяйнов В.В., Кудрявцева О.С. Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 7. С. 43–74.

Слова благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00434-а).