# Анализ модификации Штейнера разложения Корниша–Фишера случайной величины

***Марков Александр Сергеевич***

*Студент*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* markov.cmc@gmail.com

Для непрерывной случайной величины $\xi$ с $E|\xi|^4 < \infty$ имеем *классическое* разложение Корниша–Фишера (*Cornish-Fisher expansion*) [1]:

$$\xi \approx \mu + \sigma(N + \frac{1}{6}(N^2-1)S + \frac{1}{24}(N^3-3N)K - \frac{1}{36}(2N^3-5N)S^2), \quad (1)$$

где $\xi$ — аппроксимируемая величина, $\mu, \sigma, S, K$ — математическое ожидание, стандартное отклонение, коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса $\xi$ соответственно, $N$ — стандартная нормальная случайная величина. Мы можем рассматривать это разложение как функцию от четырех первых центральных моментов случайной величины, то есть:

$$\xi \approx f(\mu, \sigma, S, K). \quad (2)$$

Теперь будем говорить, что случайная величина имеет распределение Корниша–Фишера, если она задается формулой:

$$Z_{\mathrm{CF}} = f(\mu, \sigma, S, K). \quad (3)$$

Мы получили новую случайную величину, подав ей в качестве параметров четыре центральных момента старой случайной величины. Возникает вопрос: какие моменты будут у новой случайной величины $Z_{\mathrm{CF}}$? Ответил на этот вопрос Мэйллард (*Didier Maillard*) в своей статье [2], а именно: он получил формулы теоретических моментов случайной величины, распределенной по Корнишу–Фишеру. Основываясь на этих результатах, Штейнер (*Steiner*) в [3] приводит примеры, которые показывают насколько отличаются входные моменты от тех, что получаются у новой случайной величины Корниша–Фишера. В результате у автора возникает идея передавать в качестве параметров не реальные моменты случайной величины, а калиброванные согласно результатам, полученным Мэйллердом. Автор утверждает, что такой подход даст *«лучшие»* результаты, и доказывает это на примере цен индексов $S\&P$ 500. Понятие *«лучше»* определяется автором из вида графиков плотностей распределений.

После изучения этой работы принято решение проверить, действительно ли калиброванная модель лучше классической. Для этого было взято конкретное распределение, а именно: *Хи-квадрат распределение с 4 степенями свободы*, и проведено сравнение на основе метрики $L_1$ разницы между функциями распределений: истинной, классической и калиброванной. В ходе работы были построены классическая и модифицированная случайные величины Корниша–Фишера, аппроксимирующие истинное распределение, найдены их функции распределения и теоретические моменты, найдены расстояния между истинной функцией распределения и аппроксимирующими функциями распределения в метрике $L_1$. Полученные результаты показали, что классическая модель точнее аппроксимирует истинное распределение. После этого возникла идея проверить, насколько хорошо модифицированная модель приближает квантили случайной величины, ведь именно эта цель обычно преследуется при использовании разложения Корниша–Фишера. Получены результаты, показывающие преимущество классической модели разложения Корниша–Фишера.

**Литература**

1. Cornish E. A., Fisher R. A. Moments and cumulants in the specification of distributions // Revue de l'Institut International de Statistiques 4: 307:320.

2. Maillard D. A User's Guide to the Cornish Fisher Expansion // SSRN working paper: `http://ssrn.com/abstract=1997178`

3. Steiner A. Fitting Non-Normal Distributions With Calibrated Cornish-Fisher Expansions // SSRN working paper: `http://ssrn.com/abstract=2287543`