

Секция «Математика и механика»

Движение нити переменной длины

Панфилов Дмитрий Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: dmitry.i.panfilov@gmail.com

В практических приложениях издавна широко используются гибкие связи в виде нитей, канатов, тросов. В последнее время делаются попытки использования тросовых систем в космосе. Одной из рассматриваемых задач является инерционная размотка стекловолоконной нити очень большой длины (десятки километров). Математическое моделирование данной задачи сводится к решению гиперболического уравнения колебаний нити переменной длины. Одним из важных практических вопросов данной задачи является характер изменения максимума амплитуды колебаний. В данной работе рассматривается процесс распространения плоских поперечных колебаний однородной идеальной нити переменной длины в предположении, что натяжение нити остается постоянным [1]. В рамках данной модели была поставлена и решена следующая задача. В начальный момент времени нить покоится, а затем длина нити начинает возрастать с постоянной скоростью. При этом один конец нити закреплен, а другой колеблется по заданному закону.

Используя найденное в работе преобразование независимых переменных и преобразование Лапласа [2, 3, 4], получено точное аналитическое решение поставленной задачи. Показано, что одним из параметров задачи является некий аналог числа Маха – отношение скорости размотки к скорости поперечных волн в нити. Рассмотрен предельный случай, когда начальная длина нити равна нулю. В этом случае решение найдено и другим методом – методом бегущих волн. Показано, что предельный случай соответствует данному решению.

Анализ полученного решения показал, что максимальная амплитуда колебаний нити почти всегда возрастает с ростом времени, что соответствует асимптотической неустойчивости решения (в данной работе под неустойчивостью понимается рост амплитуды колебаний со временем). При некоторых условиях решение устойчиво. Установлены все возможные ситуации устойчивого поведения амплитуды колебаний. Максимальная амплитуда колебаний не растет со временем в следующих случаях: во-первых, когда амплитуда колебаний границы равна нулю, во-вторых, когда начальная длина размотанного участка бесконечно велика и, в-третьих, когда скорость распространения поперечных возмущений в нити пренебрежимо мала по сравнению со скоростью размотки или скорость распространения поперечных волн в нити в точности совпадает со скоростью размотки. Очевидно, что все перечисленные ситуации практически соответствуют вырожденным случаям движения. Это означает на практике неограниченный рост максимума амплитуды колебаний с ростом времени. В отличие от классического резонанса рост максимальной амплитуды более медленный.

На рис. 1 приведен график зависимости амплитуды от времени для середины нити переменной длины. Видно, что как максимальное отклонение растет со временем. Полученный результат роста амплитуды должен учитываться при моделировании поведения

тросовой системы, поскольку малые колебания на конце смотки всегда присутствуют.

Литература

1. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М., 2001.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М., 1951.

Слова благодарности

Хочется выразить благодарность профессору Звягину Александру Васильевичу за активное участие в работе и помощь в получении результатов.

Иллюстрации

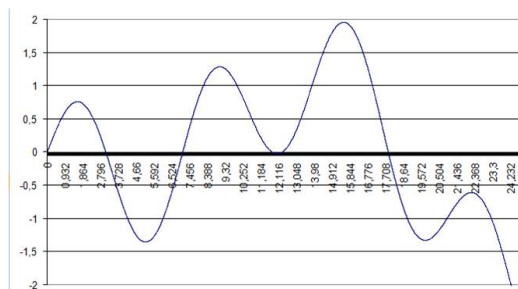


Рис. 1: Зависимость амплитуды середины нити от времени