Секция «Математика и механика»

О нижних оценках сложности схем в одном бесконечном базисе

Подольская Ольга Викторовна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: olgavikonov@gmail.com

В работе изучается сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в бесконечном полном базисе, который состоит из булевых функций от любого числа переменных, принимающих единичное значение только на множествах попарно несравнимых наборах. Такие функции будем называть антицепными, и будем обозначать множество всех антицепных функций через AC. Сложностью $L(S)$ схемы S в базисе антицепных функций будем называть число входящих в эту схему элементов. Сложностью $L(f)$ булевой функции f назовём наименьшую сложность реализации этой функции схемами в базисе AC. Будем рассматривать также функцию Шеннона $L(n)$ — максимальную сложность реализации функций от n переменных. Система AC полна, так как функции отрицание и конъюнкция являются антицепными, а их совокупность образует полный базис. Линейной функцией от n переменных будем называть булеву функцию $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$. Функцией голосования от n переменных будем называть булеву функцию $m_n(x_1, \ldots, x_n)$, которая принимает единичное значение тогда и только тогда, когда число единиц во входном наборе не меньше чем $n/2$, на оставшихся наборах она принимает значение нуль. Будем считать, что некоторое свойство выполняется для почти всех функций от n переменных, если отношение числа функций, для которых свойство выполнено, к общему числу функций от n переменных стремится к единице при $n \longrightarrow \infty$. Ранее в [1] была установлена нижняя оценка сложности схемы для линейной функции от n переменных порядка $n^{1/3}$. Доказательство нижней оценки, приведённое в [1], совмещает в себе два метода, первый из которых является методом подстановки констант. Второй метод был впервые предложен в [1], он связан с сужением области определения функции. Позднее в [2] была доказана более точная нижняя оценка порядка $(n/\ln n)^{1/2}$ сложности схемы для линейной функции от n переменных с помощью усовершенствования методов из [1]. Мы установили, что для реализации линейной функции, функции голосования и почти всех функций от n переменных схемами в базисе AC требуется по порядку не менее $\sqrt{n}$ элементов при $n \to \infty$[3]. Отсюда получаем, что для функции Шеннона от n переменных выполнено: $L(n) \geq c_1 \cdot \sqrt{n}$ при всех достаточно больших n и некоторой неотрицательной константы c_1. Тем самым улучшена известная ранее оценка $c \cdot (n/\ln n)^{1/2}$. Способ доказательства оценок, использованный в данной работе, заключается в развитии и модификации методов, применённых в [1].

Литература

1. О.М. Касим-Заде. О сложности схем в одном бесконечном базисе. Вестник Московского Университета, Сер. 1, Математика, механика. 1994, №6, С.40-44.

2. О.М. Касим-Заде. О сложности реализации булевых функций схемами в одном бесконечном базисе. Дискретный анализ и исследование операций. Январь-март 1995. Том 2, №1, С.7-20.

3. О.В. Подольская. О нижних оценках сложности схем в базисе антицепных функций. Вестник Московского Университета, Сер.1, Математика, механика. 2013, №2, С.17-23