Секция «Математика и механика»

Произведение Адамара в задаче перечисления замощений прямоугольника плитками

Потехина Елена Алексеевна

Аспирант

ЧГУ - Череповецкий государственный университет, Факультет общих математических и естественнонаучных дисциплин, Череповец, Россия

E-mail: peajk@mail.ru

Произведением Адамара формальных степенных рядов $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x)*H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$. Рассмотрим производящую функцию $\sum_{r=0}^{\infty} f_r\left(a,b\right)x^r=\left(1-ax-bx^m\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(ax+bx^m\right)^k$ последовательности, задаваемой рекуррентным соотношением $f_r\left(a,b\right)=af_{r-1}\left(a,b\right)+bf_{r-m}\left(a,b\right)$ с начальными условиями: $f_0=1$ и $f_r=0$ при $r<0$. Элемент $f_r\left(a,b\right)$ может быть интерпретирован как сумма весов замощений прямоугольника размером $1\times r$ плитками размером 1×1 с весом a и плитками размером $1\times m$ с весом b. Под весом замощения понимается произведение весов образующих его плиток. Тогда коэффициент $f_r\left(a,b\right)f_r\left(c,d\right)$ при x^r в произведении $\left(1-ax-bx^m\right)^{-1}*\left(1-cx-dx^n\right)^{-1}=\sum_{r=0}^{\infty} f_r\left(a,b\right)f_r\left(c,d\right)x^r$ есть сумма весов замощений прямоугольника $2\times r$ плитками размером 1×1 с весом a и плитками размером $1\times m$ с весом b в верхнем ряду, а также плитками размером 1×1 с весом c и плитками размером $1\times n$ с весом d в нижнем ряду.

В работе [2] указанное выше произведение Адамара вычислено комбинаторными методами при $n=2$, $b=1$, $d=1$. Метод этой работы не применим при $n>2$. Нам удалось решить задачу вычисления производящей функции весов замощений прямоугольника плитками с помощью алгебраического метода вычисления произведения Адамара [1]. Полученный результат выражает следующая теорема.

Теорема. *Для любых целых m, n, k, $m\geq 2$, $n\geq 2$, $k<m$ справедлива следующая формула*

$$\frac{x^k}{1-ax-bx^m}*\frac{1}{1-cx-dx^n}=\frac{\det R_n}{\det S_n},$$

где S_n — матрица порядка n вида

$$\begin{pmatrix} 1-acx+B_1 & A_{12} & \dots & A_{1,n-2} & A_{1,n-1} & -adx^n+A_{1n} \\ -a+B_2 & 1+A_{22} & \dots & A_{2,n-2} & A_{2,n-1} & A_{2n} \\ B_3 & -a+A_{32} & \dots & A_{3,n-2} & A_{3,n-1} & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n-2} & A_{n-2,2} & \dots & 1+A_{n-2,n-2} & A_{n-2,n-1} & A_{n-2,n} \\ B_{n-1} & A_{n-1,2} & \dots & -a+A_{n-1,n-2} & 1+A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ B_n & A_{n,2} & \dots & A_{n,n-2} & -a+A_{n,n-1} & 1+A_{n,n} \end{pmatrix},$$

где $B_i=-bf_{m-i+1}x^{m-i+1}$, $A_{ij}=-bdf_{m-i-n+j}x^{m+j-i}$, $i=1,2,...,n$, $j=2,3,...,n$, матрица R_n получается из S_n заменой первой строки строкой

$$\begin{pmatrix} f_kx^k & df_{k-n+1}x^{k+1} & \dots & df_{k-3}x^{k+n-3} & df_{k-2}x^{k+n-2} & df_{k-1}x^{k+n-1} \end{pmatrix},$$

$$f_m=f_m\left(c,d\right)=\begin{cases} \sum_{i=0}^{[m/n]}\binom{m-(n-1)i}{i}c^{m-ni}d^i \text{ при } m\geq 0, \\ 0 \text{ при } m<0. \end{cases}$$

Литература

1. Толовиков М. И. Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2011. Т. 18. Вып. 3. С. 505-506.

2. *Hadamard Products and Tilings* [Электронный ресурс] / *J. H. Kim*. — *Cornell University Library*, 2009. — Режим доступа: *http*://*arxiv.org*/*abs*/0903.0594, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. англ.