Секция «Математика и механика»

О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами в базисе "импликация - отрицание".

Комбаров Юрий Анатольевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: yuri.kombarov@gmail.com

Одними из наиболее изученных с точки зрения минимальных реализаций являются линейные булевы функции, представляемые в виде $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ или в виде $\overline{l_n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$, где "$\oplus$" означает сложение по модулю два [1]. Сложность реализации линейных функций схемами из функциональных элементов [2] (определяемая обычно как наименьшее возможное число функциональных элементов, достаточное для реализации функции f схемой в заданном базисе, и обозначаемая как $L(f)$) известна для многих базисов, состоящих из функциональных элементов с не более, чем двумя входами. Так, в работе [3] показано, что $L(l_n) = L(\overline{l_n}) = 4n - 4$ в базисе $\{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$ и $L(l_n) = L(\overline{l_n}) = 7n - 7$ в базисах $\{x\&y, \overline{x}\}$ и $\{x \vee y, \overline{x}\}$, а в работе [4] показано, что $L(l_n) = L(\overline{l_n}) = 3n - 3$ в базисе $\{x \to y, \overline{xy}\}$. Из результатов работ [5] и [6] следует, что $L(l_n) = 4n - 4$ и $L(\overline{l_n}) = 4n - 3$ в базисе $\{\overline{xy}\}$, а в работе [7] доказано, что $L(l_n) = 4n - 4$ и $4n - 3 \geq L(\overline{l_n}) \geq 4n - 4$ в базисе $\{x \to y, \overline{x}\}$.

В работе рассматриваются реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов [1,2] в базисе $B = x \to y, \overline{x}$. Для схемы S в базисе B или через $L(S)$ обозначается число функциональных элементов в S; это число называется it сложностью схемы S. *Сложностью реализации* произвольной булевой функции f в базисе B называется число $\min L(S)$, где минимум берется по всем схемам S, реализующим функцию f в базисе B. Сложность реализации функции f в базисе B обозначается через $L(f)$. Схему, изображенную на рисунке, будем называть it стандартным блоком. На рисунке буквами w, v отмечены входы блока. Звездочкой помечен элемент, который мы будем называть *выходным элементом блока.* Стандартный блок входит в некоторую схему S *правильно*, если выходы всех элементов этого блока, кроме выходного, не соединяются со входами элементов, не принадлежащих блоку. Основными результатами данной заметки являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Всякая минимальная схема в базисе B, реализующая линейную функцию $l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, состоит из $n-1$ стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно.

Теорема 2. При любом натуральном n, $n \geq 2$, $L(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1) = 4n - 3$.

Замечание 1. Из теорем 1, 2 и 3, пользуясь соображениями двойственности [1], можно вывести аналогичные утверждения для базиса $\{\overline{x}\&y, \overline{x}\}$. Ниже через L^* обозначаем сложность функций в базисе $\{\overline{x}\&y, \overline{x}\}$.

Теорема 3. Всякая минимальная схема в базисе $\overline{x}\&y, \overline{x}$, реализующая линейную функцию $x_1 + \ldots + x_n + n + 1 \pmod 2$, состоит из $n - 1$ стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно.

Теорема 4. При четных n выполняются равенства $L^*(l_n) = 4n-3$ и $L^*(\overline{l_n}) = 4n-4$, а при нечетных n выполняются равенства $L^*(l_n) = 4n-4$ и $L^*(\overline{l_n}) = 4n-3$.

Замечание 2. После того, как установлено значение сложности функции $\overline{l_n}$ в базисе B, можно считать известными значения сложности линейных функций во всех неизбыточных базисах, состоящих из не более, чем двухвходовых функциональных элементов. Действительно, из семнадцати таких базисов только следующие не содержат линейные функции: $\{x\&y, \overline{x}\}, \{x \vee y, \overline{x}\}, \{\overline{x\&y}\}, \{\overline{x \vee y}\}, \{x \to y, \overline{x}\&y\}, \{x \to y, \overline{x}\}, \{\overline{x}\&y, \overline{x}\}, \{x \to, 0\}, \{\overline{x}\&y, 1\}$. Для базисов $\{x\&y, \overline{x}\}, \{x \vee y, \overline{x}, \overline{x\&y}\}, \{x \to y, \overline{x}\&y\}, \{x \to y, \overline{x}\}, \{\overline{x}\&y, \overline{x}\}$ значения сложности линейных функций установлены в работах [3 – 7] и в данной работе, для базиса $\{x \to y, 0\}$ значения сложности нетрудно получить из значений сложности для базиса $\{x \to y, \overline{x}\}$, а значения сложности для оставшихся базисов можно получить, пользуясь соображениями двойственности.

Литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

2. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

3. Редькин Н.П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов //Проблемы кибернетики. Вып. 23. М.: Наука, 1970. 83–101.

4. Комбаров Ю.А. О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \to y, \overline{x}\&y\}$ // Тр. VIII Междунар. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва, 6–9 апреля 2009 г.). М.: МАКС Пресс, 2009. 145–149.

5. Редькин Н.П. О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. 1971. 6. 31–38.

6. Комбаров Ю.А. О сложности реализации линейной булевой функции в базисе Шеффера // Вест. Моск. ун-та, Матем. Механ. 2013. 2. 49–53.

7. Шкребела И.С. О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $x \to y, \overline{x}$ // Дискрет. матем. 2003. 15, 4. 100–112.

Слова благодарности

Автор приности благодарность своему научному руководителю Н.П. Редькину за помощь в работе.

Иллюстрации

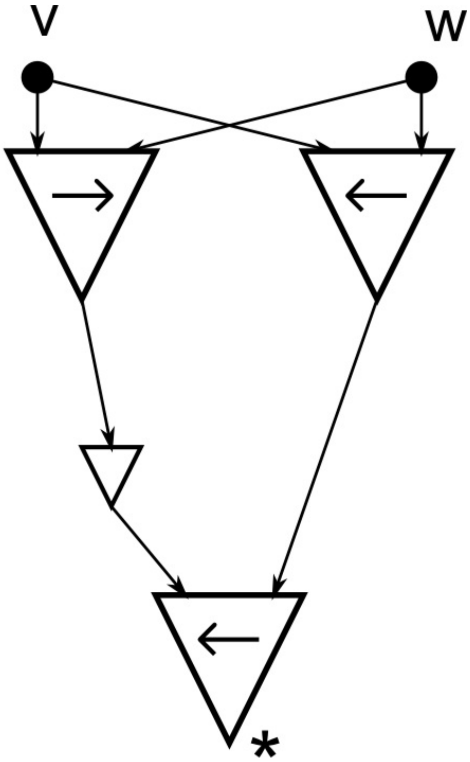

Рис. 1: Стандартный блок