Секция «Математика и механика»

k-вполне транзитивность сепарабельных и однородно разложимых групп без кручения

Рогозинский Михаил Иванович
Аспирант
Томский государственный университет, Механико-математический факультет, Томск, Россия
E-mail: rogozinsky_mikhail@mail.ru

В теории абелевых групп большой интерес вызывает понятие вполне транзитивности. Вполне транзитивными являются группы, насыщенные большим числом эндоморфизмов, такие как: qpi–группы (задача изучения свойств которых сформулирована Л. Фуксом в [3] как проблема 17а), сильно однородные и однородные сепарабельные группы без кручения, изучению которых посвящены р аботы Л.Я. Куликова, А.П. Мишиной, Р. Бэра, и других математиков.

В работе приводится понятие k–вполне транзитивности для групп без кручения, исследуется вопрос о k–вполне транзитивности однородно разложимых и сепарабельных групп.

Определение 1 ([2]). Пусть G — группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Кортеж $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ элементов группы G называется t*–независимым*, если при $i \neq j$ типы $t(x_i)$ и $t(x_j)$ несравнимы. Наибольшую длину t–независимого кортежа группы G назовем t*–длиной* и будем обозначать $k_t(G)$. В случае, если в группе G существует t–независимый кортеж длины k для всех $k \in \mathbb{N}$, полагаем $k_t(G) = \infty$.

Определение 2 ([2]). Пусть G — группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Группу G назовем k*–вполне транзитивной*, если для любых двух кортежей $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ элементов группы G из выполнения условий:

(1) $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$ для любого $i = \overline{1, k}$;
(2) кортеж X является t–независимым;

следует существование эндоморфизма θ группы G со свойством $\theta(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1, k})$.

Теорема 3. Пусть $k \geq 2$ и G — k–вполне транзитивная группа. Тогда всякий t–независимый кортеж длины k является линейно независимым.

Следствие 4. Группа без кручения G конечного ранга не является k–вполне транзитивной для всех k, удовлетворяющих неравенству $r(G) < k \leq k_t(G)$.

Теорема 5. Группа без кручения G k–вполне транзитивна для некоторого $k > 1$ тогда и только тогда, когда k–вполне транзитивна ее редуцированная часть.

Теорема 6. Пусть $G = \bigoplus_{i \in T} G_t$ — однородно разложимая группа без кручения, причем $|T| > 2$. Если G вполне транзитивна, то G не является k–вполне транзитивной для всех $1 < k \leq k_t(G)$.

Напомним, если $t_1 = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$, $t_2 = (\beta_1, \beta_2, ...)$, то $t_1 \cdot t_2 = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, ...)$, где $\chi_i = \alpha_i + \beta_i$ и бесконечность плюс нечто есть бесконечность ([4]).

Теорема 7. Однородно разложимая группа без кручения $G = \bigoplus_{i \in T} G_t$ является k–вполне транзитивной для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет одному из двух условий:

(I) G — однородная вполне транзитивная группа;
(II) $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, где G_{t_1}, G_{t_2} — вполне транзитивные группы и
$t_1 \cdot t_2 = (\infty, \infty, ..., \infty, ...)$.

Учитывая, что однородная сепарабельная группа является вполне транзитивной ([1]), для сепарабельных групп без кручения получаем такой результат
Теорема 8. Сепарабельная группа без кручения G — k–вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда G — однородная группа или G представима в виде прямой суммы двух однородных групп различных типов t_1, t_2, причем $t_1 \cdot t_2 = (\infty, \infty, ..., \infty, ...)$.

Литература

1. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. №2. С. 407–473.
2. Рогозинский М.И. О k-вполне транзитивности вполне разложимых абелевых групп без кручения // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2012. №4. С. 25–35.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т.1.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т.2.