Секция «Математика и механика»

Проблема сходимости к распределению Гиббса для линейных гамильтоновых систем

Лыков Александр Андреевич
Аспирант
МГУ - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: alekslyk@yandex.ru

Рассмотрим систему 2N стохастических неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}_k = p_k,$$
$$\dot{p}_k = -\sum_{j=1}^{N} V(j,k) q_j - \alpha \delta_k^{(m)} p_k + f_{N+k}(t),$$

$k = 1, \dots, N$, где матрица V положительно определена, коэффициент $\alpha > 0$, $\delta_k^{(m)} = 1$, только, если $k > N - m$, и нулю в остальных случаях, $f_j(t) = 0$, при $j > 2N - m$, а для остальных j функции $f_j(t)$ являются независимыми копиями стационарного (в широком смысле) процесса $f(t)$. В статье [1] изучалась однородная система ($f(t) \equiv 0$) в случае $m = 1$. Выводы данной работы позволили в [2] доказать, что уже при $m = 1$ для $f(t) = \sigma \dot{w}_t$ (белый шум) почти для всех матриц V имеет место сходимость решения к гауссовскому $2N$-вектору с распределением Гиббса, т.е. с матрицей ковариаций C:

$$C = \beta^{-1} \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \beta^{-1} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

В докладе будет показано, что аналогичное утверждение справедливо для всех $m = 1, \dots, N$. Белый шум является обобщённым гауссовским процессом с независимыми значениями. Независимость значений можно интерпретировать как отсутствие памяти. Возникает естественный вопрос: какую роль играет свойство независимости значений внешней силы для сходимости решения к гауссовскому вектору с распределением Гиббса? Оказывается, что наличие памяти внешней силы является критичным условием. Мы покажем, что, если $f(t)$ является обычным гауссовским стационарным (в широком смысле) процессом с интегрируемой ковариационной функцией C_f, и обладающий спектральной плотностью, то, почти для всех матриц V, решение будет сходится к гауссовскому вектору ξ_f, причём, почти для всех C_f, распределение ξ_f не будет гиббсовским. В докладе также будут изложены свойства распределения ξ_f при термодинамическом предельном переходе, т.е. при $N \to +\infty$.

Литература

1. A. A. Lykov, V. A. Malyshev. "Harmonic chain with weak dissipation", Markov Processes and Related Fields, 2012, v. 18, No. 4, 721-729.

2. A. A. Lykov, V. A. Malyshev. "Linear hamiltonian systems under microscopic random influence", Theory of probability and its applications, 2012, v. 57, No. 4, 794-799.