Секция «Математика и механика»

Предел спектра для эргодических унитарно инвариантных эрмитовых случайных матриц

Буфетов Алексей Игоревич
Аспирант
ГУ-ВШЭ - Государственный университет - Высшая школа экономики, Факультет математики, Москва, Россия
E-mail: a_bufetov@mail.ru

Пусть H — пространство всех бесконечных эрмитовых матриц. На этом пространстве действует сопряжениями группа $U(\infty)$ — группа финитных бесконечных унитарных матриц. Рассмотрим множество всех (борелевских) вероятностных мер $\mathcal{M}$ на H, эргодичных относительно действия этой группы. Отметим, что любая вероятностная мера на H определяется своей характеристической функцией, определенной на множестве всех финитных бесконечных эрмитовых матриц.

Теорема 1 *([1], [2]) Пусть*

$$F(x) = \exp\left(i\gamma_1 x - \frac{\gamma_2 x^2}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-i\alpha_k x)}{1 - i\alpha_k x},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_i$, $i \geq 1$ таковы, что $\gamma_2 \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. Тогда характеристические функции мер из $\mathcal{M}$ имеют следующий вид

$$f(A) = \prod_{x \in Spec(A)} F(x).$$

Будем считать, что параметры γ_i и α_i зависят от N, и ограничивать эргодическую меру из $\mathcal{M}$, определяемую этими параметрами, на пространство эрмитовых матриц размера N на N. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ — (случайный) спектр этих матриц, и пусть $L = 1/N \sum_{i=1}^{N} \delta(\lambda_i/N)$ — случайная мера, отвечающая этому спектру. Предположим, что характеристическая функция меняется так, что для $\epsilon > 0$ выполнено условие

$$\left(\frac{1}{N} \ln F(x)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} V(x), \qquad \text{при } |x| < \epsilon, \tag{1}$$

где $V(x)$ — аналитическая функция в области $|x| < \epsilon$, а сходимость равномерна в этой области. Тогда выполнена теорема

Теорема 2 *При выполнении условия* **??** *и $N \to \infty$ меры L сходятся (в слабом смысле; по вероятности) к детерминированной вероятностной мере μ, однозначно определяемой по $V(x)$.*

Литература

1. D. Pickrell, Mackey analysis of infinite classical motion groups, Pacific J. Math. 150 (1991), pp. 139–166.

2. G. Olshanski and A. Vershik, Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices, American Mathematical Society Translations, Series 2, Vol. 175, 1996, pp. 137–175.