## Секция «Математика и механика»

### Стабилизация локально минимального леса

***Мельникова Анна Евгеньевна***
*Аспирант*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,*
*Механико-математический факультет, Москва, Россия*
*E-mail: melnikova10@yandex.ru*

Широко известна, так называемая, проблема Штейнера, заключающаяся в построении минимального по длине связного графа, соединяющего заданный набор точек плоскости. Графы, являющиеся решениями этой задачи, традиционно называют *минимальными деревьями Штейнера,* или *кратчайшими деревьями* (*сетями*). Дерево Штейнера обладает следующими свойствами: является деревом (связным ацикличным графом), его ребра - прямолинейные отрезки, стыкующиеся под углами больше или равными 120°, степень каждой вершины не превосходит трёх.

Плоские деревья, состоящие из прямолинейных отрезков, стыкующихся под углами не меньше чем в 120°, называются *локально минимальными* (для множества своих вершин степени один и два). Достаточно малая окрестность каждой точки такого дерева представляет собой кратчайшее дерево (с соответствующей границей). Однако, не всякое локально минимальное дерево обязано быть кратчайшим в целом. Тем не менее, как было показано А.О.Ивановым и А.А.Тужилиным в [1], возможен процесс стабилизации сети, заключающийся в добавлении на ее рёбра новых граничных вершин степени 2. При достаточно плотном множестве добавленных вершин локально минимальная сеть превращается в кратчайшую. Первое обобщение теоремы стабилизации было получено в работе А.О.Иванова, О.А.Съединой и А.А Тужилина [2], где рассматривалась задача частичной стабилизации, т. е. добавления граничных вершин степени 2 не на все ребра локально минимального дерева, а на все, кроме одного заранее заданного. Задачу частичной стабилизации произвольного конечного числа локально минимальных деревьев автору удалось решить в конечномерном евклидовом пространстве полностью, т. е. без ограничения на количество ребер, не подвергающихся подразбиению. Фактически, найден критерий того, что такая стабилизация возможна. Кроме того, формализуется общая задача поиска кратчайшего леса в произвольном метрическом пространстве, соединяющего конечное семейство граничных компактов, и доказывается, что такие леса существуют для произвольных наборов компактов, если и только если для любого конечного подмножества пространства существует соединяющее его кратчайшее дерево.

Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство и $G$ — граф. Для каждого графа $G$ мы считаем заданным граничное множество $\partial G$ из множества его вершин $V(G)$. Каждое отображение $\varphi\, \partial G \to X$ будем называть *граничным.* Образ отображения $\varphi$ обозначим через $[\varphi]$.

*Сетью типа $G$ в пространстве $\mathcal{X}$* будем называть отображение $\Gamma$ из $V(G)$ в $X$. Образ отображения $\Gamma$ обозначим через $[\Gamma]$ и назовем *следом сети* $\Gamma$. Сеть $\Gamma$ назовем *инъективной*, если отображение $\Gamma$ инъективно. Также про сеть $\Gamma$ типа $G$ будем говорить, что $\partial\Gamma = \Gamma|_{\partial G}$ является *границей сети* $\Gamma$. Если $\Gamma$ — *сеть на* $M$, т. е. $M \subset X$ и $[\partial\Gamma] = M$ и $\Gamma$ является связной, будем говорить, что $\Gamma$ *соединяет множество* $M$. Если при этом $\partial G = V(G)$, то говорят также, что сеть $\Gamma$ *затягивает* $M$.

Пусть $\mathcal{M} = \{M_i\}$ — конечное семейство попарно непересекающихся подмножеств в $\mathcal{X}$, и $\Gamma$ — сеть типа $G$ в $\mathcal{X}$ такая, что $[\partial\Gamma]$ содержится в $\cup_i M_i$ и пересекает каждое $M_i$. Такую $\Gamma$ будем называть *сетью на* $\mathcal{M}$. Множество всех сетей на $\mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{M})$.

Пусть $\Gamma$ — такая сеть, что $[\partial\Gamma] \subset \cup_i M_i$. Обозначим через $\{\Gamma_j\}$ множество связных компонент сети $\Gamma$. Построим по паре $(\mathcal{M}, \Gamma)$ *структурный граф* $[\mathcal{M}, \Gamma]$ следующим образом: это будет двудольный граф с *множеством вершин* $\{M_i\} \sqcup \{\Gamma_j\}$, в котором вершины $M_i$ и $\Gamma_j$ соединены *ребром*, если и только если $M_i \cap [\partial\Gamma_j] \neq \varnothing$. Будем говорить, что сеть $\Gamma$ *соединяет* $\mathcal{M}$, если структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ — связный. Заметим, что если сеть $\Gamma$ соединяет $\mathcal{M}$, то структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ не содержит изолированных вершин, поэтому $[\partial\Gamma]$ пересекает каждое $M_i$ и, значит, $\Gamma$ — сеть на $\mathcal{M}$.

Фиксируем произвольное конечное семейство $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно непересекающихся подмножеств $M_i$ в $X$ и рассмотрим все сети, соединяющие $\mathcal{M}$. Инфимум чисел $\rho(\Gamma)$ по всем таким сетям $\Gamma$ называется *наименьшей длиной леса, соединяющего* $\mathcal{M}$. Слово “лес” в этом термине возникает из-за того, что если рассматриваемый инфимум достигается на некоторой сети, то он также достигается и на инъективной сети, которая, как легко видеть, обязана быть лесом. Такие инъективные сети будем называть *кратчайшими лесами, соединяющими* $\mathcal{M}$. Сеть, не обязательно инъективную, соединяющую $\mathcal{M}$ и имеющую наименьшую возможную длину, назовем *кратчайшей сетью, соединяющей* $\mathcal{M}$. По аналогии с кратчайшими деревьями, кратчайший лес можно назвать “минимальным лесом Штейнера”, что по-английски звучит как Steiner Minimal Forest и приводит к нашему обозначению smf для наименьшей длины леса, соединяющего $\mathcal{M}$. Множество всех (инъективных) кратчайших лесов, соединяющих $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathrm{SMF}(\mathcal{M})$.

Пусть $\Gamma$ — сеть в пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$. *Геометрической реализацией* сети $\Gamma$ в пространстве $\mathcal{X}$ будем называть такое отображение $g$ из множества $E(\Gamma)$ ребер сети $\Gamma$ в множество кратчайших кривых на $\mathcal{X}$, что для каждого ребра $vw \in E(\Gamma)$ кратчайшая $g(vw)$ соединяет точки $\Gamma(v)$ и $\Gamma(w)$. Для удобства изложения, пару $(\Gamma, g)$ будем называть *геометрической сетью.* Для любой геометрической сети $(\Gamma, g)$ полагаем

$$\rho(\Gamma) = \ell(g(\Gamma)) = \sum_{e \in E(\Gamma)} \ell\bigl(g(e)\bigr),$$

где $\ell(\gamma)$ обозначает длину кривой $\gamma$ в пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$. Объединение $\bigcup\limits_{e \in E(\Gamma)} g(e)$ всех кратчайших $g(e)$ (рассматриваемых как подмножества в $X$) назовем *следом геометрической реализации* $g$ и будем обозначать через $[g]$. Если $\Gamma$ — кратчайшее дерево, соединяющее конечное множество $M \subset X$, и $g$ — некоторая его геометрическая реализация, то геометрическое дерево $(\Gamma, g)$ также назовем *кратчайшим, соединяющим* $M$, а множество всех таких геометрических деревьев будем обозначать через $\mathrm{SMT}_g(M)$. Аналогично, если $\Gamma$ — кратчайший лес, соединяющий конечное семейство $\mathcal{M}$ попарно непересекающихся подмножеств пространства $\mathcal{X}$, и $g$ — его геометрическая реализация, то геометрический лес $(\Gamma, g)$ также будем называть *кратчайшим лесом, соединяющим* $\mathcal{M}$, а множество всех таких геометрических лесов будем обозначать через $\mathrm{SMF}_g(\mathcal{M})$.

**Теорема 1.** *В произвольном метрическом пространстве существование кратчайшего леса, соединяющего произвольный конечный набор попарно непересекающихся компактов, равносильно существованию кратчайшего дерева, соединяющего произвольный* *конечный набор точек.*

**Теорема 2.** *Если последовательность $\mathcal{M}^k = \{M_i^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, конечных семейств попарно непересекающихся компактов в $\mathcal{X}$ сходится по Хаусдорфу к семейству $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно непересекающихся компактов, и $\Gamma^k$ — последовательность кратчайших лесов, соединяющих $\mathcal{M}^k$, имеющих один и тот же тип $G$ и сходящихся к некоторому лесу $\Gamma$, соединяющему $\mathcal{M}$, то $\Gamma$ является кратчайшим лесом, соединяющим $\mathcal{M}$.*

**Теорема 3.** *Пусть $\bigl\{(\Delta_i, d_i)\bigr\}$ — произвольное конечное семейство вложенных попарно непересекающихся геометрических деревьев в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Положим $\mathcal{M} = \bigl\{[d_i]\bigr\}$ и $(\Delta, d) = \sqcup_i(\Delta_i, d_i)$. Предположим, что для каждого кратчайшего леса $\Gamma \in \mathrm{SMF}(\mathcal{M})$ и каждой его геометрической реализации $g$ геометрическое дерево $(\Gamma, g) \oplus (\Delta, d)$ является локально минимальным. Тогда существует такое $p_0 \ge 0$, что для любого целого $p \ge p_0$, любого $\Gamma \in \mathrm{SMF}(\mathcal{M})$ и каждой его геометрической реализации $g$ геометрическое дерево $(\Gamma, g) \oplus (\Delta^p, d^p)$ лежит в $\mathrm{SMT}_g(\partial\Delta^p)$. Иными словами, начиная с некоторого $p$, объединение $p$-подразбитого леса $(\Delta, d)$ и любого кратчайшего леса, соединяющего $\bigl\{[d_i]\bigr\}$, является кратчайшим деревом, соединяющим границу этого $p$-подразбитого леса.*

Дальнейшее развитие указанные результаты получили в работе [3].

## Литература

1. Иванов А.О., Тужилин А.А., Стабилизация локально минимальных деревьев// Матем.заметки, 2009. Т.86. No 4. С. 512-524.

2. Иванов А.О., Съедина О.А., Тужилин А.А., Структура минимальных деревьев Штейнера в окрестностях лунок их ребер//Матем.заметки, 2012. Т.91. No 3. С. 353-370.

3. Иванов А.О., Мельникова А.Е., Тужилин А.А., Стабилизация локально минимального леса// Матем. сборник, 2013. В печати.