## Секция «Математика и механика»

### Весовые классы непрерывных функций на метрических пространствах

***Нестеров Никита Юрьевич***
*Студент*
*ЮФУ - Южный федеральный университет, Факультет математики, механики и компьютерных наук, Ростов-на-Дону, Россия*
*E-mail: nikitanesterov2006@rambler.ru*

Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство; $v : X \to (0, \infty)$ — некоторая фиксированная функция (вес). Обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных комплекснозначных функций на $X$ и рассмотрим его следующий весовой подкласс:

$$C_v(X) = \left\{ f \in C(X) \,:\, \|f\|_v = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{v(x)} < \infty \right\}.$$

Частным случаем пространства $C_v(X)$ является класс $BC(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на $X$.

Как обычно, при рассмотрении пространств непрерывных функций существенную роль играют специальные функции, которые называют "шапочками":

$$h_{x_0,\delta}(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\delta}\,\rho(x, x_0), \text{если } \rho(x, x_0) < \delta, \\ 0, \text{если } \rho(x, x_0) \geqslant \delta. \end{cases}$$

Здесь $x_0 \in X$, $\delta > 0$. Очевидно, $h_{x_0,\delta}$ непрерывна на $X$.

Для веса $v$ введём его *верхнюю и нижнюю регуляризации* $v^*$ *и* $v_*$:

$$v^*(x) := \lim_{\delta \to +0} \sup\left\{ v(y) : y \in B_x(\delta) \right\},$$

$$v_*(x) := \lim_{\delta \to +0} \inf\left\{ v(y) : y \in B_x(\delta) \right\},$$

где $B_x(\delta) = \left\{ y \in X : \rho(x, y) < \delta \right\}$.

Проверено, что $C_v(X)$ — линейное нормированное пространство, причем его топология мажорирует топологию поточечной сходимости на $X$.

Кроме того, получены результаты, касающиеся нетривиальности пространства $C_v(X)$. Ясно, что пространство $C_v(X)$ нетривиально, то есть содержит функцию, отличную от тождественного нуля, тогда и только тогда, когда оно не исчезает хотя бы в одной точке $x_0 \in X$, то есть существует функция $f \in C_v(X)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Доказана

**Теорема 1** *Следующие утверждения эквивалентны:*

*(i)* $C_v(X)$ *не исчезает в точке* $x_0 \in X$*;*

*(ii) вес* $v$ *отграничен от* $0$ *в некоторой окрестности* $B_{x_0}(\delta)$ *точки* $x_0$*;*

*(iii)* $v_*(x_0) > 0$*;*

*(iv)* $\exists \delta_0 > 0$ *такое, что "шапочки"* $h_{x_0,\delta}$ *принадлежат* $C_v(X)$ *при всех* $\delta \in (0, \delta_0]$.

Соответствующие веса, для которых пространства $C_v(X)$ не исчезают ни в одной точке $X$, называются *полными* на $X$ (см. [1]).

Когда рассматриваются весовые пространства всегда ставится вопрос о возможных классах весов $v$. С одной стороны, желательно, чтобы весовые функции обладали наиболее хорошими свойствами, а с другой стороны, нельзя без необходимости сужать совокупность изучаемых пространств $C_v(X)$. Вслед за [2] введём следующее определение.

**Определение 1** *Пусть $v$ — полный вес на $X$. Ассоциированным с $v$ весом называется функция*

$$\widetilde{v}(x) := \sup\Big\{ \big|f(x)\big| : f \in C_v(X),\ \|f\|_v \leqslant 1 \Big\},\ x \in X.$$

Легко проверяется, что $0 < \widetilde{v}(x) \leqslant v(x)$ при всех $x \in X$ и что функция $\widetilde{v}$ полунепрерывна снизу на $X$. Понятно, что полунепрерывность снизу — это более сильное свойство, чем полнота веса. При этом $\|f\|_{\widetilde{v}} = \|f\|_v$, так что пространства $C_{\widetilde{v}}(X)$ и $C_v(X)$ совпадают и изометричны.

Таким образом, при исследовании классов $C_v(X)$ можно ограничиться полунепрерывными снизу весовыми функциями.

Сформулирован критерий полноты пространства $C_v(X)$.

**Теорема 2** *Пусть $v$ — полунепрерывный снизу вес на $X$. Пространство $C_v(X)$ банахово тогда и только тогда, когда вес $v$ локально ограничен сверху на $X$, то есть*

$$\forall x_0 \in X \quad \exists \delta_0 > 0,\, \exists M > 0 :\ v(x) \leqslant M,\ \forall x \in B_{x_0}(\delta_0).$$

Полунепрерывные снизу локально ограниченные сверху на $X$ веса будем называть *каноническими весами.*

**Определение 2** *Вес $v_1$ подчинён весу $v_2$ ($v_1 \prec v_2$), если существует $C > 0$, при котором*

$$v_1(x) \leqslant C\, v_2(x) \text{ для всех } x \in X.$$

*Если одновременно $v_1 \prec v_2$ и $v_2 \prec v_1$, то есть если*

$$\frac{1}{C}\, v_2(x) \leqslant v_1(x) \leqslant C\, v_2(x),\ x \in X,$$

*при некотором $C > 0$, будем говорить, что веса $v_1$ и $v_2$ эквивалентны (обозн. $v_1 \sim v_2$).*

Стандартным образом с использованием "шапочек" было установлено

**Предложение 1** *Пусть $v_1$, $v_2$ канонические веса. Для того чтобы $C_{v_1}(X)$ было (непрерывно) вложено в $C_{v_2}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы, имело место подчинение: $v_1 \prec v_2$. Соответственно, классы $C_{v_1}(X)$ и $C_{v_2}(X)$ совпадают тогда и только тогда, когда ($v_1 \sim v_2$).*

Не оставлен без внимания и вопрос о компактности вложения $C_{v_1}(X) \subset C_{v_2}(X)$, доказана

**Теорема 3** *Пусть $X$ имеет хотя бы одну предельную точку; $v_1$, $v_2$ локально ограничены сверху и полунепрерывны снизу на $X$. Тогда компактное вложение пространства $C_{v_1}(X)$ в $C_{v_2}(X)$ не может иметь места.*

В случае же, когда у $X$ нет предельных точек, на примере демонстрируется, что компактное вложение может выполняться.

Решён вопрос о наличии в классе эквивалентности непрерывного веса.

**Теорема 4** *Пусть $v$ канонический вес. Для того чтобы пространство $C_v(X)$ могло быть задано непрерывным весом, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{x\in X} \frac{v^*(x)}{v(x)} < \infty.$$

Приведен пример веса $v$, для которого последнее условие нарушено. Это говорит о наличии классов $C_v(X)$, которые нельзя задать с помощью непрерывных весов.

### Литература

1. Абанин А.В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Математический анализ и математическое моделирование: тр. междунар. конф. молодых учен. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010. С. 15-20.

2. Bierstedt K.D., Bonet J., Taskinen J. Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math. 1998. V. 127. P. 137-168