Секция «Математика и механика»

Хаусдорфова размерность случайной кривой Коха

Попов Вадим Сергеевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: grog37@mail.ru

Обычная, неслучайная кривая Коха строится следующим образом. Возьмём отрезок, скажем, [0;1]. Разделим его на 3 равных отрезка, на среднем из них (т.е. на $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$) как на стороне построим равносторонний треугольник, а сам отрезок удалим. Получится ломаная из четырёх звеньев, каждое из которых имеет длину $\frac{1}{3}$. Применив ту же процедуру к каждому из этих четырёх отрезков, получим в результате ломаную из 16 отрезков. Затем снова применим описанную процедуру к каждому из получившихся отрезков, и т.д. Предельное множество, полученное в результате такого построения, называется кривой Коха.

Случайная кривая Коха возникнет, если в описанный процесс построения ввести элемент случайности следующим образом. Начав с отрезка [0;1], мы с вероятностью $p \in [0;1]$ произведём на его средней части описанное выше построение, а с вероятностью $1-p$ оставим отрезок неизменным. В последнем случае процесс закончится, а в первом проделываем то же самое с каждым из звеньев полученной четырёхзвенной ломаной, двигаясь слева направо и действуя на каждом шаге независимо от результатов предыдущих; дойдя до конца, возвращаемся в левый конец новой ломаной и т.д. При этом, встретив звено ломаной, на котором уже на предыдущем шаге треугольник не строился, мы оставляем его неизменным с вероятностью 1. Свойства такой случайной кривой рассматриваются в данном докладе. В частности, оценивается, а иногда и вычисляется хаусдорфова размерность кривой при различных значениях параметра p (определение хаусдорфовой размерности можно найти в [3]), которая является случайной величиной. Обозначим её через d.

Следующая теорема вполне согласуется с результатом, полученным Мораном [2] для обычной кривой Коха.

Теорема 1 *1)* $d = 1$ *почти наверное при* $0 \le p \le \frac{3}{4}$;

2) $\mathbf{P}(d \in [1; \frac{\ln 4p}{\ln 3}]) = 1$ *при* $\frac{3}{4} < p < 1$;

3) $d = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ *почти наверное при* $p = 1$.

Заметим, что в литературе можно встретить результаты, касающиеся хаусдорфовой размерности случайной кривой Коха, однако они относятся к случайному множеству, определение которого существенно отличается от нашего (смотрите, например, [1]).

Литература

1. K. Falconer. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications, 2003.

2. P.A.P. Moran. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. // Proc. Camb. Phil. Soc. 42 (1946), 15-23.
3. Y.B. Pesin, Dimensions theory in dynamical systems: contemporary views and applications, 1997.

Слова благодарности

Хочу выразить огромную благодарность своему научному руководителю, Гуревичу Б.М. Работа частично поддержана грантом РФФИ 11-01-00982.