Секция «Математика и механика»

Гамильтонов метод решения нелинейной задачи о равновесии пластинки в аэродинамическом потоке

Шретер Сергей Алексеевич
Аспирант
Таганрогский государственный педагогический институт, Физико-математический факультет, Таганрог, Россия
E-mail: sergshre@yandex.ru

Рассмотрим экспериментальную задачу, представляющую собой упругий стержень, жестко защемленный нижним концом, к верхнему концу которого жестко прикреплена твердая пластинка [2]. Точка крепления стержня и пластинки лежит на линии симметрии пластинки. Эта система помещена в поток воздуха, считаем, что поток воздействует только на пластинку, при этом стержень изгибается в одной плоскости. Ставится задача: найти зависимость конечных перемещений точек упругого стержня от аэродинамических сил, действующих на пластинку. Воспользуемся точным уравнением упругого равновесия для первоначально прямого стержня постоянного сечения [1], получим уравнение Кирхгофа для представленной системы, в котором α_T - текущий угол атаки пластинки, $s(\alpha_T)$, $p(\alpha_T)$ - коэффициенты аэродинамических сил (определяются экспериментально [2]), $\theta(l)$ - угол между касательной к оси деформированного стержня и вектором скорости потока, зависимость $\theta(l)$ и является искомой.

$$B\frac{d^2\theta}{dl^2}+\frac{\rho}{2}s(\alpha_T)V^2\sin(\theta)+\frac{\rho}{2}p(\alpha_T)V^2\cos(\theta)=0$$

Непосредственное решение этого уравнения дает эллиптический интеграл Лежандра I рода, поэтому появляется необходимость поиска приближенного метода решения задачи. В качестве приближенного решения выбираем гамильтонов подход. Он заключается в сведении исходного уравнения Кирхгофа к системе двух уравнений первого порядка с соответствующей функцией Гамильтона H, с последующей нормализацией H в определенном числе членов. Точное решение полученной таким образом приближенной системы в новых канонических переменных u и v будет зависеть от постоянных интегрирования a и b, которые можно найти из нелинейной системы [1].

$$v=(a+ib)e^{iml}, u=(a-ib)e^{-iml}, m=i\frac{\partial H_*}{\partial(uv)}=const$$

Используемый гамильтонов подход к решению задачи дает хорошую близость при сравнении его с решением численным методом Рунге-Кутта-Фельберга 4-5 порядка (оба решения ищутся при одинаковых граничных условиях). При малых скоростях потока (до 40-50 м/с) расхождение решений $\theta(l)$ составляет 0.5-0.6 градусов, с ростом скорости (до 90-100 м/с) расхождение увеличивается до 3-5 градусов [1]. Это расхождение показывает необходимость увеличения числа членов в разложении функции Гамильтона для достижения большей точности решения.

Литература

1. Илюхин А.А., Шретер С.А. Поведение пластинки на упругом стержне в аэродинамическом потоке //Научно-Технический Вестник Поволжья. Казань, 2011. No. 6. С. 43-47.

2. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М. 1986. 86 с.