Секция «Математика и механика»

Использование функции напряжений в решении задач прочности слоистых пластин

Бреховских Павел Валентинович

Студент

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева, Институт авиации,наземного транспорта и энэргетики, Казань, Россия

E-mail: pav-89@mail.ru

Пластины из слоистых композиционных материалов достаточно широко применяются в конструкциях летательных аппаратов, в связи с этим появляются все новые формы расчетных моделей для определения напряженно-деформированного состояния. Приведем решение данной задачи с использованием базисных функций.

Рассмотрим анизотропную пластину постоянной толщины h, с внешней границей L_0, находящуюся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

От исходных уравнений теории упругости перейдём к одному относительно функции напряжений $F(x, y)$, связанной с компонентами напряжений равенствами:

$$\sigma_x = \frac{d^2F}{dy^2}, \quad \sigma_y = \frac{d^2F}{dx^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{d^2F}{dxdy}. \tag{1}$$

Путём преобразований, получим уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений:

$$\gamma_0\frac{d^4F}{dx^4} + \gamma_1\frac{d^4F}{dx^3dy} + \gamma_2\frac{d^4F}{dx^2dy^2} + \gamma_3\frac{d^4F}{dxdy^3} + \gamma_4\frac{d^4F}{dy^4} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\gamma_0 = \mu_{22}$, $\gamma_1 = -2\mu_{26}$, $\gamma_2 = 2\mu_{22} + \mu_{66}$, $\gamma_3 = -2\mu_{66}$, $\gamma_4 = \mu_{11}$; μ_{ij} — упругие постоянные, характеризующие свойства материала.

Определив функцию F из уравнения (2), удовлетворяющую заданным на границе пластины условиям, можно найти напряжения, деформации и перемещения в любой точке пластины. Если на границе пластины заданы усилия X_n и Y_n, то граничные условия удобнее записать в интегральной форме:

$$-\int_0^s Y_n + C_1 = \frac{dF}{dx}, \quad \int_0^s X_n + C_2 = \frac{dF}{dy}, \tag{3}$$

где S — текущая точка любого контура; C_1 и C_2 — произвольные постоянные, не влияющие на напряженное состояние.

Полученное решение уравнения (2) имеет вид:

$$F(x,y) = A_0 + A_1(x+y) + A_2(x^2 - 2(y^2) + xy) + A_3(x^3 + (x^2)y + x(y^2) + y^3) + \ldots + A_N x^N P^N,$$

где A_i - подлежащие определению произвольные коэффициенты, количество которых зависит от метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения (определяются из граничных условий с помощью метода взвешенных невязок).

Изложенный алгоритм решения задачи деформирования анизотропного тела удобен для реализации в системах автоматизированного проектирования процессов изготовления деталей различного назначения, входящих в конструкцию авиационной и ракетной техники. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач параметрической идентификации и обратных задач, например, уточнения физико-механических параметров, определяющих коэффициенты математических моделей на основе прочностного эксперимента.

Литература

1. Дружинин Г.В., Закиров И.М., Бодунов Н.М. Базисные функции в приближенных решениях краевых задач. Казань: Изд-во «Фен», 2000. 376 с.

2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

3. Мэттьюз Р., Ролингс Р. Композиционные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. 408 с.