

Секция «Математика и механика»

Тотально вычислимая колмогоровская сложность

Савин Арсений Анатольевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: arssav@gmail.com

Для любой строки над произвольным алфавитом  $\Sigma$  (обычно  $\Sigma = \{0, 1\}$ ) можно определить ее *колмогоровскую сложность* - длину кратчайшего описания в некотором языке.

Более формально, пусть задан некий способ описания  $V$ , то есть алгоритм-декомпрессор (машина Тьюринга), переводящий описания в слова. Тогда двоичные слова являются программами относительно этого способа описания. На вход программе подается описание слова  $p$  (программа, выводящая его) и некоторое априорно известное слово  $x$  (условие). Тогда, если  $V(p, x) = y$ , то говорят, что  $p$  является *описанием* для  $y$  при известном  $x$  относительно  $V$ .

*Условной колмогоровской сложностью относительно декомпрессора  $V$  слова  $y$  при условии  $x$*  называют длину кратчайшего описания  $y$  относительно  $V$ :

$$K_V(y|x) = \min |p| : V(p, x) = y$$

Можно доказать (теорема Соломонова-Колмогорова), что существует *оптимальный декомпрессор  $D$*  такой, что колмогоровская сложность относительно него не более, чем на константу превосходит колмогоровскую сложность относительно произвольного декомпрессора:

$$\exists D \forall V \exists c \forall x \forall y K_D(y|x) < K_V(y|x) + c$$

Сложность относительно оптимального декомпрессора называют *колмогоровской сложностью слова* (сложность определена с точностью до  $O(1)$ ).

*Тотальная колмогоровская сложность* [1, 2] определяется аналогично, с заменой произвольного декомпрессора на *тотальный*, то есть останавливающийся на любом входе. Для тотальной колмогоровской сложности также верна теорема Соломонова-Колмогорова об оптимальном способе описания. Обозначение:  $KT(y|x)$ .

Очевидно, что  $KT(y|x) \geq K(y|x)$ . Но верно ли, что эти две величины *значительно отличаются*? В данной работе приведен пример двух семейств слов, слабо различающихся с точки зрения обычной колмогоровской сложности, но сильно различающихся с точки зрения тотальной. Такие примеры были известны и раньше [3], однако были довольно искусственными. Следующее же семейство слов определяется вполне естественно, а именно:

Пусть  $x_n^V$  - количество останавливающихся программ длины не более  $n$  относительно декомпрессора  $V$ . Тогда утверждается, что

$$\forall U, V \text{ (оптимальных)} \quad K(x_n^V | x_n^U) = O(1)$$

Основным же результатом работы является доказательство следующего утверждения:

### Теорема

Существуют оптимальные способы описания  $U$  и  $V$ , такие, что для любых констант  $c$  и  $d$  существует бесконечно много таких  $n$ , что тотальная колмогоровская сложность  $x_n^V$  относительно  $x_{n+c}^U$  - больше  $d$ :

$$\exists U, V \text{ (оптимальные)} \forall c, d \exists^\infty n \text{ } KT(x_n^V | x_{n+c}^U) > d$$

Доказательство выполнено с использованием *игрового метода*.

### Литература

1. B. Bauwens. Computability in statistical hypotheses testing, and characterizations of independence and directed influences in time series using Kolmogorov complexity. PhD thesis, Ugent, May 2010.
2. Nikolay Vereshchagin, "Algorithmic Minimal Sufficient Statistic Revisited Mathematical Theory and Computational Practice, 5th Conference on Computability in Europe, CiE 2009, Heidelberg, Germany, July 19-24, 2009. Proceedings. LNCS 5635.

### Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Николаю Константиновичу Верещагину за помощь в постановке и решении задачи