Секция «Математика и механика»

О частичном порядке, задаваемом связанными идемпотентами в гильбертовом пространстве

Ефимов Михаил Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: efimov.mikhail@gmail.com

Пусть H — гильбертово пространство над полем комплексных чисел, $B(H)$ — совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве H.

Определение 1 *Будем говорить, что оператор $A \in B(H)$ обладает связанным идемпотентом, если существует такой оператор $P \in B(H)$, что $P^2 = P$, $\overline{\mathrm{Im} A} = \mathrm{Im} P$, $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} P$. Множество операторов, обладающих связанными идемпотентами, будем обозначать через $I_s(H)$, а указанный идемпотент P для оператора $A \in I_s(H)$ через $\pi(A)$.*

Определение 2 *Пусть $A, B \in B(H)$. Положим $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если и только если $A = B$, или $A \in I_s(H)$ и $\pi(A)A = \pi(A)B$, $A\pi(A) = B\pi(A)$.*

Отметим, что если H — конечномерно, то введенное отношение совпадает с $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядком на матрицах (см. [1]). Утверждение следующей теоремы аналогично результату для минус-порядка из работы [2]:

Теорема 3 *Отношение $\overset{\sharp}{\leqslant}$ является частичным порядком и для любых $A, B \in B(H)$ следующие условия эквивалентны:*

1) $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$;

2) существует прямое разложение пространства H в сумму замкнутых подпространств $H = H_1 \oplus H_2$, что операторы $A, B\colon H_1 \oplus H_2 \to H_1 \oplus H_2$ имеют следующие матричные представления:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1\colon H_1 \to H_1$ и $B_1\colon H_2 \to H_2$ — ограниченные линейные операторы, A_1 инъективен, $\overline{\mathrm{Im} A} = H_1$;

3) $A = B$ или $A \in I_s(H)$, $A(B - A) = (B - A)A = 0$.

Литература

1. S. K. Mitra. On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. 1987. No 92. P 17–37.

2. P. Semrl. Automorphisms of B(H) with respect to minus partial order // J. Math. Anal. Appl. 2010. No. 369. P. 205–213.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2502.2012.1.