Секция «Математика и механика»

Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения с разрывными коэффициентами

Атласова Елена Ивановна
Студент
СВФУ, Институт математики и информатики, Якутск, Россия
E-mail: sargylana.zyryanova.67@mail.ru

В данной работе рассматривается одна нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами. Актуальность избранной темы не вызывает сомнений. С одной стороны, обоснованием этого вывода служат многочисленные приложения параболических уравнений в естествознании, технике и экономике. С другой стороны, исследование разрешимости краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, в том числе и параболических, значительно усложняется, если коэффициенты уравнений или краевые условия являются разрывными функциями. Отметим, что ранее подобные задачи были рассмотрены в работах [1, 2] и др.

Пусть $D = \Omega \times (0, T)$, где Ω – ограниченная область из $\mathbb{R}$, для простоты возьмем $\Omega = [-1; 1]$. Введем следующие обозначения $D^+ = D \cap \{x > 0\}$ и $D^- = D \cap \{x < 0\}$. Определим пространство V_0:

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),\\ v_t(x,t) \in L_2(D),\ d_1 v_x(-0,t) = d_2 v_(+0,t)\};$$

норму в пространстве V_0 определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}.$$

Пусть $f_1(x,t),\ f_2(x,t)$ суть заданные при $(x,t) \in \bar{D^-}$, и $(x,t) \in \bar{D^+}$ соответственно функции. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения

$$Lu = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_t - d_1 u_{xx},\ x < 0, \\ u_t - d_2 u_{xx},\ x > 0, \end{cases} \qquad f(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t),\ x < 0, \\ f_2(x,t),\ x > 0, \end{cases}$$
$$d_1,\ d_2 > 0 - const,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(-0,t) = u(+0,t), \\ d_1 u_x(-0,t) = d_2 u_x(+0,t), \end{cases} \tag{3}$$

$$u(x,0) = \alpha(x) u(x,T) + u_0(x). \tag{4}$$

Теорема. Пусть выполняются условия

$$\alpha(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\Omega), \quad |\alpha(x)| \leq \alpha_0 < 1. \tag{5}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(D)$ и любой функции $u_0(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, такой что $u_0(-1) = u_0(1) = 0$, $u_0(-0) = u_0(+0)$, $d_1 u_{0x}(-0) = d_2 u_{0x}(+0)$, краевая задача (1)–(4) имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_0.

Литература

1. Кожанов А.И. Нелокальные по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. - Новосибирск, 2004. Т.7, 1. С.50-60.

2. Шарин Е.Ф. Обратная коэффициентная задачи и связанная с ней нелокальная задача для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Математические заметки ЯГУ. Т.17. Вып. 1. - Якутск, 2010. С. 154-173.