Секция «Математика и механика»

Об алгоритмически разрешимых случаях проблемы выразимости в пропозициональных исчислениях

Боков Григорий Владимирович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: bokovgrigoriy@gmail.com

Пусть $\Sigma \subseteq P_2$ — конечное множество функций и $X \subseteq U$ — множество переменных, тогда обозначим через $\Phi_\Sigma(X)$ множество всех формул над логическими связками из Σ и множеством переменных X. Каждой формуле $\mathfrak{F} \in \Phi_\Sigma$ однозначно сопоставим функцию $f_\mathfrak{F} \in P_A$ [5]. Формулу $\mathfrak{F}$ из Φ_Σ будем называть тавтологией, если $f_\mathfrak{F} \equiv 1$. Обозначим через Th множество всех тавтологий в Φ_Σ.

Пусть $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_m$ различные формулы из $\Phi_\Sigma(\{x_1, ..., x_n\})$, тогда набор $\langle \mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_m; \mathfrak{F}_0 \rangle$ задает модусную операцию на Φ_Σ, определенную схемой:

$$\frac{\mathfrak{F}_1(x_1, ..., x_n), ..., \mathfrak{F}_m(x_1, ..., x_n)}{\mathfrak{F}_0(x_1, ..., x_n)}$$

Множество всех модусных [3,4] операций на Φ_Σ, которые тавтологии переводят в тавтологии $\omega : \mathrm{Th} \to \mathrm{Th}$, обозначим через $\mathcal{M}_\Sigma$. Множество тавтологий Th и множество модусных операций $\Omega \subseteq O_{\mathrm{Th}}$ образуют алгебраическую систему (Th, Ω), которую будем называть пропозициональным исчислением.

Проблема выразимости [2] для пропозиционального исчисления (Th, Ω) состоит в указании всех таких пар (M_1, M_2), что $M_1, M_2 \subseteq \mathrm{Th}$ и все тавтологии из M_2 можно получить с помощью применения правил вывода Ω к тавтологиям, принадлежащим M_1. Из [1] следует, что проблема выразимости для пропозиционального исчисления с операцией modus ponens алгоритмически неразрешима. Далее в работе будет рассмотрено несколько случаев пропозициональных исчислений, для которых проблема выразимости алгоритмически разрешима.

Обозначим через S и T соответственно множества $\{\omega \in \mathcal{M}_\Sigma \mid \omega = \langle \mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_0 \rangle\}$ и $\{\omega \in \mathcal{M}_\Sigma \mid \omega = \langle \mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_m; \mathfrak{F}_0 \rangle$ и $\mathfrak{F}_i$ - переменная , $i = 1, ..., m\}$. Верна следующая теорема.

Теорема. *Для любого конечного множества логических связок* $\Sigma \subseteq P_2$ *и любого конечного множества допустимых модусных операций* $\Omega \subseteq S \cup T$ *проблема выразимости для исчисление* (Th, Ω) *алгоритмически разрешима.*

Литература

1. Боков Г. В. Проблема полноты в исчислении высказываний // Интеллектуальные системы, М., 2009, т. 13, 1-4, с. 165 - 181.

2. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы // Изд-во Моск. ун-та, М., 1982.

3. Минц Г. Е. Допустимые и производные правила // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 8 (1968), 189-191.

4. Циткин А. И. О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Матем. сб., 102(144):2 (1977).

5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику // Наука, М., 1986.