Секция «Математика и механика»

О сложности реализации линейной булевой функции в некотором базисе

Комбаров Юрий Анатольевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: yuri.kombarov@gmail.com

Одними из наиболее изученных с точки зрения их минимальных реализаций являются линейные булевы функции, представляемые в виде $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ или в виде $\overline{l_n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, где $c = \{0, 1\}$, а "$\oplus$"означает сложение по модулю два [1]. Первый результат в этом направлении был получен в 1952 г. Кадро [2]: для реализации линейной булевой функции (существенно зависящей) от n переменных контактной схемой необходимо и достаточно $4n - 4$ контактов. Сложность реализации линейных функций схемами из функциональных элементов [3] (определяемая, как правило, как наименьшее возможное число функциональных элементов, достаточное для реализации функции f схемой в заданном базисе и обозначаемая как $L(f)$) известна для многих базисов, состоящих из не более, чем двухвходовых функциональных элементов. Так, в работе [4] показано, что $L(l_n) = L(\overline{l_n}) = 4n - 4$ в базисе $\{x \wedge y, x \vee y, \overline{x}\}$ и $L(l_n) = L(\overline{l_n}) = 7n - 7$ в базисах $\{x \wedge y, \overline{x}\}$ и $\{x \vee y, \overline{x}\}$, а в работе [5] показано, что $L(l_n) = L(\overline{l_n}) = 3n - 3$ в базисе $\{x \to y, \overline{x} \wedge y\}$. Для некоторых базисов известны очень точные оценки для сложности реализации линейных функций, например, в работе [6] доказано, что $L(l_n) = 4n - 4$ и $4n - 4 \le L(\overline{l_n}) \le 4n - 3$ в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$, а в работе [7] доказано, что $L(l_n) = 4n-4$ и $4n-4 \le L(\overline{l_n}) \le 4n-3$ в базисе $\{x \to y, \overline{x}\}$. Для некоторых базисов есть описание устройства минимальных схем. Например, в работе [5] показано, что все минимальные схемы, реализующие линейные функции в базисе $\{x \to y, \overline{x} \wedge y\}$ имеют определенную блочную структуру, а в работе [8] аналогичный результат доказан для минимальных схем, реализующих линейные функции в базисе $\{x \wedge y, x \vee y, \overline{x}\}$.

В настоящей работе устанавливается точное значение сложности функции $\overline{l_n}$ в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$, состоящем из единственного функционального элемента — штриха Шеффера, а также описывается структура всех минимальных схем, реализующих функцию l_n в том же базисе.

Основным приемом доказательства в данной работе является метод забивающих констант, предложенный в работе [4] и использованный также в статьях [6,7,8,9]. Впрочем, для доказательства утверждений из данной работы одного только метода забивающих констант оказалось недостаточно, поэтому в ней использован ряд соображений, связанных с глобальной структурой схемы.

Для схемы S в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$ через $L(S)$ обозначается сумма весов функциональных элементов в S; число $L(S)$ называется *сложностью* схемы S. *Сложностью реализации* произвольной булевой функции f в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$ называется число $\min L(S)$, где минимум берется по всем схемам S, реализующим функцию f в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$. Сложность реализации функции f в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$ будем обозначается через $L(f)$.

Схему, изображенную на рис. 1, будем называть *стандартным блоком.* Все элементы, входящие в стандартный блок — двухвходовые. Знаком „□“ на рисунке отмечен элемент блока, который мы будем называть *выходным.* Стандартный блок входит в некоторую схему S *правильно*, если выходы всех элементов этого блока, кроме выходного, не подаются на входы элементов, не принадлежащих блоку.

Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1.

Всякая минимальная схема в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$, реализующая линейную функцию $l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, состоит из $n-1$ стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно.

В следующей теореме устанавливается точное значение сложности функции $\overline{l_n}$ в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$.

Теорема 2.

При любом натуральном n сложность реализации линейной функции $\overline{l_n} = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$, $n \geq 2$ в базисе $\{\overline{x \wedge y}\}$ составляет $4n-3$.

Литература

1. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

2. Cardot C., Quelques rezultats sur l'application de l'algebre de Boole a la synthesedes circuits a relais. Ann. Telecomm. 1952. 7, 2. 75–84.

3. Лупанов О.Б., Асимптотические оценки сложности управляемых систем. — М.: МГУ, 1984.

4. Редькин Н.П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов.Проблемы кибернетики. 1970. 23, 83–101.

5. Комбаров Ю.А., О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $xrightarrowy, overlinexy$. Труды VIII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"(Москва, 6–9 апреля 2009 г.) М.: МАКС Пресс, 2009, 145–149.

6. Редькин Н.П., О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов. Кибернетика. 1971. 6, 31–38.

7. Шкребела И.С., О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $xtoy, overlinex$. Дискретная математика. 2003. 15, 4, 100–112.

8. Комбаров Ю.А., О минимальных схемах для линейных булевых функций. Вестник Московского университета, серия 1, Математика. Механика. 2011. 6, 41–44.

9. Редькин Н.П., О минимальных и асимптотически минимальных схемах для некоторых индивидуальных булевых функций. Материалы IX Международного семинара „Дискретная математика и ее приложения“, посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. 11–19.

Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя проф. Н.П. Редькина за помощь в работе и постановку задачи.

Иллюстрации

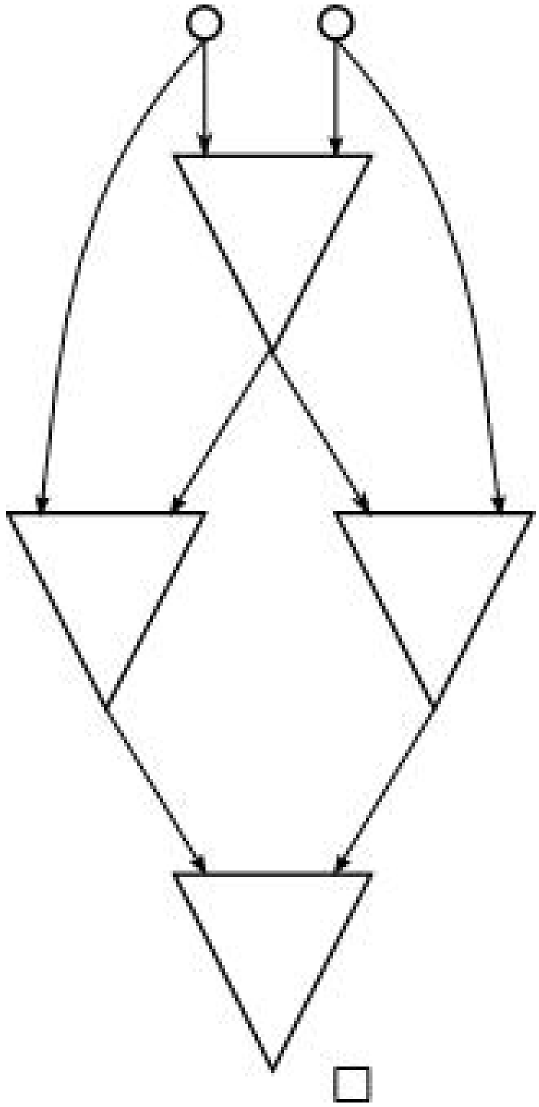

Рис. 1: Рис. 1