Секция «Математика и механика»

О полноте и пополнениях метрических отображений

Нгуентхи Хонгван

Аспирант

Московский педагогический государственный университет, Математический факультет, Москва, Россия

E-mail: nguyenhongvan@mail.ru

В статье [1] Б.А. Пасынков предложил понятие метрического отображения. Полнота метрических отображений была определена с помощью фильтров. Но полнота метрических пространств обычно определяется при помощи фундаментальных последовательностей. Возникает вопрос, можно ли определить полноту метрических отображений также с помощью фундаментальных последовательностей. В этой работе получено упрощение определения полноты метрических отображений посредством замены фильтров фундаментальными последовательностями множеств и получено простое достаточное условие, когда полноту можно определять при помощи фундаментальных точек.

Определение. Пусть даны метрическое отображение $(f, \rho)\colon X \to Y$ и $y \in Y$. Последовательность $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ $(A_n \subset X, n \in \mathbb{N})$ называется *y-фундаментальной*, если $y \in cl\, fA_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $diam\, A_n \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ точек пространтсва X называется *y-фундаментальной*, если она фундаментальна относительно псевдометрики ρ и последовательность точек $\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к y в Y.

Теорема 1. *Для метрического отображения $(f, \rho)\colon X \to Y$ эквивалентны утверждения:*

i) метрика ρ на f полна;

ii) для любой точки $y \in Y$ и любой y-фундаментальной последовательности множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполняется соотношение $f^{-1}y \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} cl\, A_n \neq \varnothing$.

Если пространство Y имеет счетный характер, то i) эквивалентно

iii) для любой точки $y \in Y$ любая y-фундаментальная последовательность точек $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в X сходится к некоторой точке слоя $f^{-1}y$.

Теорема 2. *Всякое замкнутое и послойно полное метрическое отображение полно.*

В случае произвольных метрических отображений классический метод построения метрических пространств (при помощи фундаментальных последовательностей точек) не проходит. Поэтому в работе [1] доказательство существования единственности пополнения метрических отображений сводится к теореме о существовании единственности пополнения для метрических пространств. Эквивалентность пунктов i) и ii) теоремы 1 позволяет получить теорему о построении пополнения произвольных метрических отображений методом, близким к классическому (для случая метрических пространств). А эквивалентность пунктов i) и iii) теоремы 1 позволяет распространять классический метод построения пополнения метрических пространств на случай, когда пространство Y имеет счетный характер.

Литература

1. Пасынков Б. А. О метрических отображениях. // Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика. 1999. 3, с. 29-32.