Секция «Математика и механика»

Представление классических ортогональных криволинейных систем координат на плоскости квадратичными формами и характеризация эллиптических координат

Неустроев Роберт Николаевич
Студент
ФГАОУ ВПО Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова, Институт математики и информатики, Якутск, Россия
E-mail: rebok@inbox.ru

В статье [1] изучался предельный случай конструкции Кричевера [2] построения ортогональных криволинейных системы координат — на сингулярных спектральных кривых. В работе [1] были найдены спектральные кривые в явном виде, отвечающие декартовой, полярной, параболической и другим системам координат. Для эллиптической системы координат спектральные кривые не были найдены. В этой работе доказана следующая теорема, характеризующая эллиптические координаты.

Теорема 1. Декартову систему координат на плоскости при $x,\ y > 0$, полярную систему координат и параболическую систему координат на плоскости при $x > 0$ можно задать с помощью квадратичных форм

$$x = \left(\ e^{\lambda u^1+\mu u^2} e^{\rho u^1+\sigma u^2}\ \right) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda u^1+\mu u^2} \\ e^{\rho u^1+\sigma u^2} \end{pmatrix},$$

$$y = \left(\ e^{\lambda u^1+\mu u^2} e^{\rho u^1+\sigma u^2}\ \right) \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda u^1+\mu u^2} \\ e^{\rho u^1+\sigma u^2} \end{pmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием ортогональности выписанных криволинейных координат является равенство

$$\begin{aligned} &\Big(a_1 e^{2u^1\lambda+2u^2\beta}\lambda + c_1 e^{2u^1\gamma+2u^2\delta}\gamma + b_1 e^{u^1(\lambda+\gamma)+u^2(\beta+\delta)}(\lambda+\gamma)\Big) \times \\ &\times \Big(a_1 e^{2u^1\lambda+2u^2\beta}\beta + c_1 e^{2u^1\gamma+2u^2\delta}\delta + b_1 e^{u^1(\lambda+\gamma)+u^2(\beta+\delta)}(\beta+\delta)\Big) + \\ &\Big(a_2 e^{2u^1\lambda+2u^2\beta}\lambda + c_2 e^{2u^1\gamma+2u^2\delta}\gamma + b_2 e^{u^1(\lambda+\gamma)+u^2(\beta+\delta)}(\lambda+\gamma)\Big) \times \\ &\times \Big(a_2 e^{2u^1\lambda+2u^2\beta}\beta + c_2 e^{2u^1\gamma+2u^2\delta}\delta + b_2 e^{u^1(\lambda+\gamma)+u^2(\beta+\delta)}(\beta+\delta)\Big) = 0, \end{aligned}$$

которое должно быть выполнено для всех (u^1, u^2).

Эллиптическая система координат на плоскости не допускает представление (1-2) с помощью приведенной квадратичной формы.

Литература

1. Миронов А.Е., Тайманов И.А. Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие спектральным кривым // Труды математического института им. В.А.Стеклова. 2006. Т. 255. С. 180-196.

2. Кричевер И.М. Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функц. анализ и его приложения. 1997. No. 31. Т.1. С. 32-50.