Секция «Математика и механика»

Непрерывные сужения измеримых линейных операторов.

Юрова Екатерина Владимировна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: yurova-k@rambler.ru

Хорошо известно, что всякая радоновская вероятностная мера на пространстве Фреше сосредоточена на компактно вложенном рефлексивном банаховом пространстве (см. гл. 7 в [1]). С другой стороны, для широких классов измеримых линейных операторов известно существование непрерывно вложенных пространств, сужения на которые непрерывны (см. [2]). В литературе используется несколько различных естественных определений измеримого линейного оператора на локально выпуклом пространстве X с радоновской вероятностной мерой μ, принимающего значения в локально выпуклом пространстве Y (см. [1]).

Определение 1. Измеримым линейным оператором будем называть отображение A, почти всюду по мере μ являющееся пределом последовательности непрерывных линейных операторов $A_n\colon X \to Y$.

Всюду ниже X и Y будут сепарабельными пространствами Фреше поэтому все борелевские меры на X (т.е. меры на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ пространства X) автоматически радоновы, а всякий измеримый линейный оператор из X в Y автоматически оказывается μ-измеримым, т.е. для всякого $B \in \mathcal{B}(Y)$ множество $A^{-1}(B)$ измеримо относительно μ (входит в лебеговское пополнение $\mathcal{B}(X)$). Другое естественное определение таково. Измеримым линейным оператором в широком смысле называют такое μ-измеримое отображение $A\colon X \to Y$, что найдутся измеримое линейное подпространство $X_0 \subset X$ полной меры и линейное в обычном смысле отображение $A_0\colon X_0 \to Y$, почти всюду равное A. Такое отображение A_0 называют собственно линейной версией A.

Измеримый линейный оператор между сепарабельными пространствами Фреше является измеримым линейным оператором в широком смысле, ибо множество всех точек $x \in X$, где последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится, является борелевским линейным подпространством. Некоторое время считалось, что оба понятия равносильны (см., например, теорему 2 на с. 618 в [3]), но затем выяснилось, что в общем случае это не так (см. [4]). Рассмотрим следующее свойство отображения A:

(RB) *существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полной меры, компактно вложенное в X, такое, что A имеет версию, являющуюся непрерывным оператором из $(E, \|\cdot\|_E)$ в Y.*

Теорема 1.

Пусть X и Y – сепарабельные пространства Фреше, μ – борелевская вероятностная мера на X, $A_n\colon X \to Y$ – последовательность непрерывных линейных операторов, причем $A_n x \to Ax$ почти всюду. Тогда существуют компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полной меры и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon (E, \|\cdot\|_E) \to Y$, почти всюду совпадающий с A.

Литература

1. Bogachev V.I. Measure theory. V. 2. Springer, New York, 2007.
2. Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 1998.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. Наука, М., 1971.
4. Kanter M.// Lecture Notes Math. 1978. V. 645. P. 114–123.

Слова благодарности

Выражаю благодарность моему научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук Богачеву Владимиру Игоревичу. Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00518, 11-01-12104-офи-м и 11-01-90421-Укр-ф-а.