Секция «Математика и механика»

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве с помощью формулы Фейнмана

Ремизов Иван Дмитриевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ivremizov@yandex.ru

Задачей Коши для уравнения теплопроводности относительно неизвестной функции $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ называется система условий

$$(1)\quad \begin{cases} u'_t(t,x)=g(x)\mathrm{tr}\,(Au''_{xx}(t,x))\,; & t\geq 0, x\in H,\\ u(0,x)=u_0(x); & x\in H. \end{cases}$$

Здесь H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $A\colon H\to H$ — линейный ядерный положительный самосопряжённый оператор. Для каждой из функций $g\colon H\to\mathbb{R}$ и $u_0\colon H\to\mathbb{R}$ существует последовательность цилиндрических функций на H с ограниченными производными Фреше всех порядков, которая равномерно сходится к g и u_0 соответственно. Кроме того, функция g положительна и отделена от нуля: $g(x)\geq g_0\equiv \mathrm{const}>0$.

Задача Коши (1) была решена [1] в случае переменного коэффициента g и $H=\mathbb{R}^d$. В случае $\mathrm{dim}H=\infty$ и $g(x)\equiv 1$ решение также известно [3]. В случае же переменного g и $\mathrm{dim}H=\infty$ до недавнего времени решение было неизвестно. Автором доклада доказана

Теорема 1. Задача Коши (1) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от функций g и u_0, даваемое формулой Фейнмана (о формулах Фейнмана см. [4]):

$$u(t,x)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\int\limits_H\int\limits_H\dots\int\limits_H\int\limits_H}_{n} u_0(y_1)\mu^{y_2}_{\frac{2tg(y_2)}{n}A}(dy_1)\mu^{y_3}_{\frac{2tg(y_3)}{n}A}(dy_2)\dots\mu^{y_n}_{\frac{2tg(y_n)}{n}A}(dy_{n-1})\mu^{x}_{\frac{2tg(x)}{n}A}(dy_n).$$

Здесь μ^z_B — гауссова мера [2] на H с корреляционным оператором B и средним z, и $\frac{2tg(y_n)}{n}A$ есть результат умножения числа $\frac{2tg(y_n)}{n}$ на оператор A.

Литература

1. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains. — Infinite Dimansional Analyasis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, No. 3 (2010), 377-392.

2. Daletsky Yu.L., Fomin S.V. Measures and differential equations in infinite-dimensional space. — Kluwer, 1991.

3. Da Prato G., Zabczyk J. Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces. — London Mathematical Society Lecture Notes Series 293, 2004.

4. Smolyanov O.G. Feynman formulae for evolutionary equations. — Trends in Stochastic Analyasis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность О.Г. Смолянову за привлечение внимания к формулам Фейнмана, а также Я.А. Бутко, О.Г. Смолянову и Н.Н. Шамарову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00724, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009-2013 годы, а также при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220 «О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования» по договору 11.G34.31.0054, заключенного между Министерством образования и науки РФ, ведущим учёным и ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (на базе которого осуществляется данное научное исследование).