Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Универсальность некоторых моделей случайных матриц

Наумов Алексей Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: naumov_ne@inbox.ru

Рассмотрим случайную матрицу $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Обозначим через $\lambda_1, ..., \lambda_n$ собственные значения матрицы $n^{-1/2}X_n$, и пусть $F_n(x, y) = \frac{1}{n}\#\{i : Re(\lambda_i) \le x, Im(\lambda_i) \le y\}$ - эмпирическая функция распределения собственных значений. Если матрица является симметричной, то все собственные значения являются действительными числами, и эмпирическая функция распределения будет функцией одной переменной $F_n(x)$. Первый вопрос, который нас будет интересовать, при каких условиях последовательность $F_n(x, y)$ сходится в слабом смысле к некоторой предельной функции, скажем $F(x, y)$, по вероятности. Второй вопрос – какой вид имеет функция $F(x, y)$. Принцип универсальности утверждает, что предельное распределение не должно зависеть от распределения элементов матрицы. Многие результаты в теории случайных матриц мотивированы этим феноменом. В докладе я рассмотрю полукруговой закон Вигнера, круговой закон и эллиптический закон, который является обобщением двух предыдущих.

Пусть матрица $X_n = \{X_{ij}\}_{i,j=1}^n$ удовлетворяет условиям : а) пары $(X_{ij}, X_{ji})_{i\ne j}$ - н.о.р. случайные векторы, $\mathbb{E}X_{12} = \mathbb{E}X_{21} = 0$, $\mathbb{E}X_{12}^2 = \mathbb{E}X_{21}^2 = 1$ и $\mathbb{E}X_{12}X_{21} = \rho$; б) $\{X_{ii}\}_{i\ge1}$ - н.о.р. случайные величины, не зависящие от $\{X_{ij}\}_{i\ne j}$, $\mathbb{E}X_{11} = 0$ и $\mathbb{E}X_{11}^2 < \infty$.

1. При $\rho = 1$ матрица является симметричной, $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$ по вероятности, и $F(x)$ имеет плотность, которая представляет собой полукруговой закон Вигнера, см. [1].

2. При $\rho = 0$ $F_n(x, y) \xrightarrow{w} F(x, y)$ по вероятности, и $F(x, y)$ имеет плотность равномерного распределения на круге. Круговой закон был впервые доказан Гирко в работе [2], но его доказательство содержало неточности, в частности, не было показано, почему наименьшее сингулярное число матрицы $(n^{-1/2}X_n - zI), z \in \mathbb{C}$ не может быть сколь угодно малым. Основной заслугой Гирко был метод, который позволяет переходить от несимметричной матрицы $n^{-1/2}X_n$ к симметричной матрице $(n^{-1/2}X_n - zI)^*(n^{-1/2}X_n - zI), z \in \mathbb{C}$. Используя метод Гирко, Бай привел новое доказательство в предположении ограниченности плотности элементов матрицы, см. [1]. Без этого предположения круговой закон был впоследствии доказан в работах [3] и [4].

3. При $|\rho| < 1$ в работе [5] Гирко показал, что $F_n(x, y) \xrightarrow{w} F(x, y)$ по вероятности, и $F(x, y)$ имеет плотность равномерного распределения на эллипсе, но его доказательство содержало аналогичные неточности, что и доказательство кругового закона. В [6] автором доказана

Теорема. Если $\max(\mathbb{E}X_{12}^4, \mathbb{E}X_{21}^4) < \infty$ и $|\rho| < 1$, то $F_n(x, y) \xrightarrow{w} F(x, y)$ по вероятности, $F(x, y)$ имеет плотность

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-\rho^2)}, & x, y \in \left\{u, v \in \mathbb{R} : \frac{u^2}{(1+\rho)^2} + \frac{v^2}{(1-\rho)^2} \le 1\right\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результат работы [6] опирается на работу [7], в которой получена асимптотика наименьшего сингулярного числа симметричной матрицы, и на работы [3], [4].

Литература

1. Bai Z., Silverstein J. W. Spectral analysis of large dimensional random matrices. Springer, New York, 2010
2. Girko V. L. The circular law // Teor. Veroyatnost. i Primenen.,1985. 29. No. 4. P. 669-679.
3. Götze F., Tikhomirov, A.N. The circular law for random matrices // Ann. Probab., 2010. 38. No. 4. P. 1444-1491.
4. Tao T., Vu V. Random matrices: universality of local eigenvalue statistics // Acta Math., 2011. 206. No. 1. P. 127-204.
5. Girko V. L. The elliptic law // Teor. Veroyatnost. i Primenen., 1985. 30. No. 4. P. 640-651.
6. Naumov A.A. Elliptic law for real random matrices // arXiv:1201.1639
7. Vershynin R. Invertibility of symmetric random matrices // arXiv:1102.0300