

**Нематическое упорядочение жесткоцепных полиэлектролитов, индуцированное электростатическим взаимодействием:**

**эффект дискретного распределения заряда вдоль цепи.**

**Венев С.В.**

*Аспирант*

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,*

*физический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: wenew@polly.phys.msu.ru*

Исследование жесткоцепных молекул (и жидких кристаллов), которые будем далее называть «стержнями», привело к созданию «надежных» теорий, объясняющих явления упорядочения как для жидких кристаллов, так и для жесткоцепных полимеров с различными механизмами гибкости. В то же время теории нематического упорядочения полиэлектролитных стержней (диссоциирующих на заряженный макроион и мобильные противоионы в растворе) предлагали различные физические интерпретации явления. Неполный учет электростатических взаимодействий между заряженными компонентами системы приводил порой к качественно неверным результатам. Детальный учет многочастичного электростатического взаимодействия между заряженными компонентами системы<sup>1</sup>, позволил заключить, что эти взаимодействия между стержнями соответствуют эффективному притяжению и более того, способствуют нематическому упорядочению во всех рассмотренных режимах.

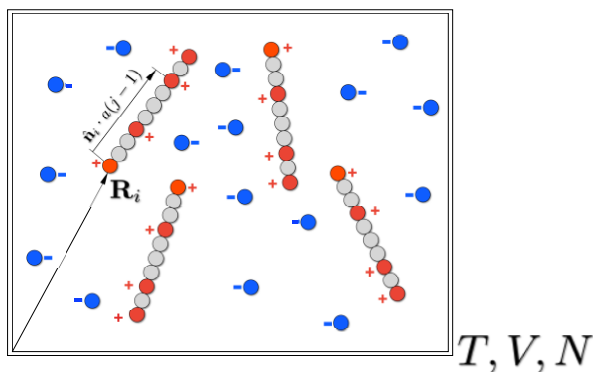


Рис. 1 Схематическое изображение системы, в целом она - электронейтральна.

Однако одним из приближений этой теории является предположение о непрерывном распределении заряда вдоль стержней (заряд равномерно «размазан» по стержню), однако такое приближение неудовлетворительно<sup>2</sup> в случае высокой концентрации стержней или их слабой заряженности. В данной работе нами предложена модель<sup>3</sup>, точно учитывающая расположение зарядов вдоль стержней, а так же их «точечность» (Рис. 1). Был посчитан вклад электростатических взаимодействий в свободную энергию системы:

$$\frac{\Delta F_{corr}}{k_B T} = \frac{V}{2} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \left[ \ln \left( 1 + \tau \rho \ell \frac{1 + m t b_{\vec{q}}}{q^2} \right) - \tau \rho \ell \frac{1 + m t b_{\vec{q}}}{q^2} \right]$$

$$b_{\vec{q}} = \int d\vec{n} f(\vec{u}, \vec{n}) \frac{\sin^2(\vec{q}\vec{n} \cdot L/2)}{(m\tau)^2 \sin^2(\vec{q}\vec{n} \cdot L/(2m\tau))},$$

здесь  $m$  - полное число звеньев стержня,  $t$  - доля заряженных звеньев,  $\rho$  - концентрация стержней,  $V$  - полный объем системы,  $f(\vec{u}, \vec{n})$  - это ориентационная функция распределения с директором  $\vec{u}$ . Проведены численные вычисления для случаев изотропного и полностью упорядоченного распределения стержней, было продемонстрировано усиление роли

электростатики в системе, а так же значительное усиление ориентирующего действия электростатических взаимодействий по сравнению с непрерывной моделью (получаема предельным переходом  $m\dot{t} \rightarrow \square$ ).

**Литература**

1. I.I. Potemkin and A.R. Khokhlov., J. Chem. Phys. 120, 10848 (2004)
2. I.I. Potemkin and V.V. Palyulin., Phys. Rev. E 81, 041802 (2010)
3. D. Yang, S.V. Venev et al., J. Chem. Phys. 134, 074901 (2011)

## Ламинарное пламя и звуковые волны в двумерном потоке

Зайцев М. Л.

Аспирант

Институт Проблем Безопасного Развития Атомной Энергетики

Российской Академии Наук, Москва, Россия

E-mail: [mlzaytsev@gmail.com](mailto:mlzaytsev@gmail.com)

Большой научный интерес представляет поиск единого уравнения, описывающего химическое равновесие и движение фронта реакции [1-3]. Прямое численное моделирование процесса горения сильно затруднено разностью характерных химических и гидродинамических размеров [1]. Уравнение фронта горения сначала было получено в приближении слабо искривленного пламени и/или малого теплового расширения при горении [4-6]. В последнее время появились работы, где это ограничение в некоторых случаях снимается [7-9].

В данной работе выводятся соответствующие уравнения пламени в двумерном (2D) потоке с минимальными ограничениями, позволяющими учесть влияние звука на развитие (или затухание) неустойчивости Дарье-Ландау, методом, отличным от уже существующих. Полная система гидродинамических уравнений, описывающих развитие неустойчивости фронта реакции в двумерном потоке сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений, с использованием переменных Лагранжа и интегралов движения. Полученная система позволяет исследовать процессы внутри фронта, не решая при этом полную систему уравнений гидродинамики и химической кинетики. Понимание динамики распространения пламен позволило бы глубже понять механизм их развития и обнаружить новые эффекты и явления.

В работе [10] была выведена аналогичная система в трехмерном случае. Но в двумерном потоке развитый там метод не работал. Данная работа дополняет результаты той работы и позволяет в простом двумерном случае исследовать фронт реакции и все его основные свойства, важные в приложениях.

## Литература

1. Я.Б. Зельдович и др. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука (1980)
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика: Гидродинамика. Т. VI. - М.: Наука (1986)
3. F.A. Williams. Combustion Theory, Benjamin, CA. (1985)
4. G.I. Sivashinsky, Acta Astronaut. **4**, 1177 (1977)
5. M. Frankel, Phys. Fluids A **2**, 1879 (1990)
6. V. Bychkov, M. Zaytsev and V. Akkerman, Phys. Rev. E **68**, 026312 (2003)
7. H. EL-Rabii, G. Joulin and K. Kazakov, Phys. Rev. Lett. **100**, 174501 (2008)
8. G. Joulin G., H. El-Rabii and K. Kazakov, J. Fluid Mech, **608**, 217 (2008)
9. K. A. Kazakov, Phys. Rev. Lett. **94**, 094501 (2005)
10. М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман, ЖЭТФ. Т. **135**, № 4, С. 800-819 (2009)

## Динамика связывания трех идентичных атомов в молекулу в условиях бозе-эйнштейновской конденсации

Жуков Е.В.

Студент (магистр)

Государственный университет Молдовы,  
физический факультет, Кишинев, Молдова

E-mail: logarifmus@gmail.com

В данной работе представлены основные результаты исследования динамики образования бозе-конденсированных тримеров (трехатомных молекул) в условиях рамановского процесса взаимодействия атомов и молекул с двумя импульсами когерентного лазерного излучения. Актуальность этих исследований является несомненной. Они затрагивают такие вопросы, как рассмотрение квантовых процессов и волн материи на макроуровне, образование новой формы материи, возникновение новых научных направлений, таких как «суперхимия» и атоматроника; создание квантовых компьютеров и атомных лазеров и т.д.

Предполагается, что три одинаковых свободных бозе-конденсированных атома с нулевой кинетической энергией (нулевая температура) и полной энергией  $E_i = 3\hbar\omega_0$  переходят в молекулярное состояние с энергией  $E_m = \hbar\Omega_0$  через возбужденное молекулярное состояние  $E_u$ , поглощая и излучая кванты света с энергиями соответственно  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  (рис. 1). При этом используются два фазово-когерентных импульса с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и определенными значениями амплитуд полей и фаз. Связывание атомов в молекулу приводит к переносу одного фотона от первого импульса ко второму. Поэтому усиление одного из импульсов и ослабление другого в процессе атомно-молекулярной конверсии могло бы быть указанием на существование когерентности процесса. Что касается промежуточного возбужденного уровня с энергией  $E_u$ , то его можно исключить из рассмотрения, используя принцип адиабатического следования. В ряде работ было показано, что населенность верхнего возбужденного уровня исчезающе мала по сравнению с населенностями нижних уровней.

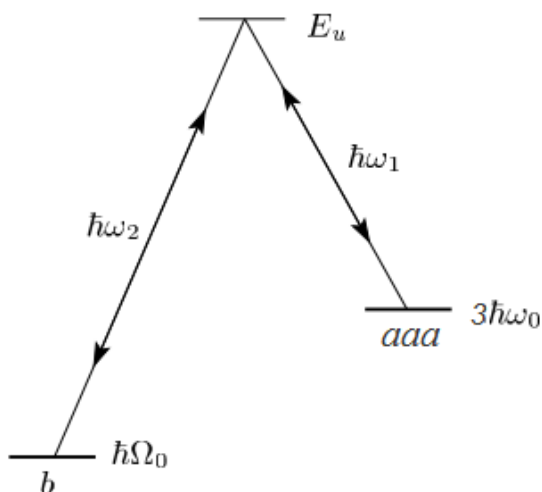


Рис.1 Схема процесса индуцированной рамановской атомно-молекулярной конверсии. Уровень *aaa* соответствует энергии трех свободных атомов, уровень *b* — энергии свободной молекулы.

Предложен модельный гамильтониан  $\hat{H}$ , который описывает процесс атомно-тримерной конверсии как единый процесс:

$$\hat{H} = \hbar g (\hat{a}\hat{a}\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{c}_1\hat{c}_2^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_2) + \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega_0\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\omega_1\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1 + \hbar\omega_2\hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2,$$

где  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  ( $\hat{a}^\dagger$  и  $\hat{b}^\dagger$ ) - бозонные операторы уничтожения (рождения) соответственно атомного и тримерного состояний,  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$  ( $\hat{c}_1^\dagger$  и  $\hat{c}_2^\dagger$ ) - операторы уничтожения (рождения) фотонов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а  $g$  — константа конверсии.

Исходя из этого гамильтониана, была получена система нелинейных эволюционных уравнений для амплитуд  $a, b, c_1, c_2$ , используя которые удалось получить систему нелинейных уравнений для плотностей атомов  $n = a^\dagger a$ , молекул  $N = b^\dagger b$ , фотонов  $f_{1,2} = c_{1,2}^\dagger c_{1,2}$ , а также для двух «компонент поляризации»  $Q = i(aaab^\dagger c_1 c_2^\dagger - a^\dagger a^\dagger a^\dagger b c_1^\dagger c_2)$ ,  $R = aaab^\dagger c_1 c_2^\dagger + a^\dagger a^\dagger a^\dagger b c_1^\dagger c_2$ . Из этих уравнений видно, что если в начальный момент отсутствуют две какие-либо компоненты системы, то эволюция оказывается невозможной. В приближении среднего поля получены точные аналитические решения системы нелинейных уравнений, а также решения в различных приближениях через эллиптические функции, которые описывают динамику плотностей атомов, молекул и фотонов в процессе стимулированной атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате.

Показано, что процесс конверсии может быть как периодическим, так и аperiodическим во времени, причем скорость протекания процесса существенно определяется начальными плотностями частиц и начальной разностью фаз. В зависимости от начальных условий возможно установление различных режимов процесса конверсии. Предсказывается возможность установления особого состояния системы — покоя — при ненулевых значениях начальных плотностей частиц, так как процессы связывания атомов в молекулы и распада молекул сбалансированы.

В приближении заданных начальных плотностей фотонов обоих импульсов ( $f_{10}, f_{20} \square n_0, N_0$ ) показано, что имеет место аperiodический режим превращения атомов в молекулы. На начальном этапе плотность молекул медленно убывает, причем, чем больше отношение  $n_0/N_0$ , тем быстрее происходит это убывание. Затем плотность молекул достигает минимума, после чего начинает расти и асимптотически стремится к величине  $N_0 + \frac{n_0}{3}$ . Имеет место также другой аperiodический режим, когда плотность молекул монотонно растет и асимптотически стремится к тому же значению  $N_0 + \frac{n_0}{3}$ .

В случае заданных начальных плотностей атомов  $n_0$  и фотонов второго импульса  $f_{20}$  ( $n_0, f_{20} \ll N_0, f_{10}$ ) имеет место периодический режим превращения атомов в молекулы, причем период осцилляций плотности молекул монотонно убывает с ростом  $n_0$  и  $f_{20}$ .

В случае, если  $f_{10}, N_0 \ll f_{20}, n_0$ , то имеет место снова аperiodический режим превращений атомов в молекулы.

Изученные процессы представляют собой пример новой химии — «суперхимии», в которой имеет место когерентное стимулирование химических реакций. Коллективные осцилляции плотностей атомов и молекул свидетельствуют о существовании когерентности в системе. Стимулированная квантовая динамика может заменить обычную при сверхнизких температурах, давая полностью новый тип коллективного поведения системы. В будущем специфика бозе-стимулированной химической динамики может открыть путь для новых типов квантово-контролируемых химических реакций.

**Способ введения дробного интегро - дифференцирования в квантовую теорию многих частиц****Алисултанов З.З.***студент**Дагестанский государственный университет, физический факультет, Махачкала, Россия.**E-mail: zaur0102@mail.ru*

В последнее время при исследовании нелинейных динамических систем особый интерес представляет аналитический подход, основанный на использовании математического аппарата дробного интегро - дифференцирования. В связи с этим возникает вопрос о введении данного аппарата в ту или иную область.

В системе многих частиц, взаимодействие между ними может привести к появлению квазичастиц. Взаимодействие между последними приводит, вообще говоря, к изменению зависимости кинетической энергии от импульса [1,2], в частности может привести к дробно степенной зависимости,

$$E \sim |p|^\alpha, \quad (1)$$

где  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $p$  - безразмерная переменная, связанная с размерной соотношением  $p = q/q_0$ ,  $q_0$  - некоторый характерный импульс системы.

Если найти Фурье образ от (1), то мы приходим к следующему оператору Гамильтона

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

где  $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$  есть дробная производная Рисса, которая определяется как [3]

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}[2-\alpha]\right)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{|x-\xi|^{\alpha-1}}$$

Задача сводится к установлению связи между взаимодействием квазичастиц и зависимостью (1). Непосредственно с функцией взаимодействия квазичастиц связана вершинная функция, которую можно найти с помощью уравнения Дайсона [1].

Таким образом, между зависимостью (1) и функцией взаимодействия квазичастиц имеется неявная связь.

Проведенное исследование позволяет понять физику процесса в системе многих частиц, описываемого уравнениями дробного порядка.

**Литература.**

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика, часть 2. – М.: Наука, 1978.
2. Каданов, Г. Бейм. Квантовая статистическая механика. - М.: Мир, 1964.

3. Самко С.Г. Килбас Ф.Ф. Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка. - Минск: Наука и техника, 1987.



## Электроосмос на анизотропных супергидрофобных поверхностях

**Беляев Алексей Вячеславович**

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

физический факультет, Москва, Россия

E-mail: al\_belyaev@inbox.ru

В последнее время развитие микрофлюидики стимулирует интерес к разработке новых эффективных методов транспорта жидкости, управления течениями и перемешивания в микро-каналах [1]. В таких системах поддержание требуемой скорости течения (0.1-1 см/сек) требует колоссальной разности давлений (порядка  $10^7$  Па в канале диаметром 100 нм). Как известно, в растворах электролитов, находящихся в контакте с электрически заряженной стенкой, при приложении электрической разности потенциалов возникает течение. Использование этого эффекта, названного электроосмосом, является одним из путей из решений данной проблемы.

Ранние исследования [2, 3] показали, что эффект электроосмоса может быть усилен при наличии гидрофобного скольжения жидкости на стенке. Скольжение характеризуется величиной  $b$ , которая имеет размерность длины (длина скольжения) и фигурирует в качестве коэффициента пропорциональности в граничном условии Навье:

$$u = b \cdot \frac{\partial u}{\partial n},$$

где  $u$  – скорость жидкости на стенке, а  $n$  означает производную по нормали к границе твердой и жидкой фаз [4]. В этом случае скорость электроосмотического течения электролита с длиной Дебая  $\kappa^{-1}$  увеличивается в  $(1+b\kappa)$  раз по сравнению с несколько (гидрофильной) стенкой. Для гладких гидрофобных поверхностей величина  $b$  обычно не превышает 10 нм, поэтому усиление незначительно.

Супергидрофобные поверхности (текстуры) создают, комбинируя эффекты шероховатости (на микро- и наномасштабе) и гидрофобности материала [5]. Важным свойством супергидрофобных покрытий является необычайно высокая подвижность жидкостей на такой поверхности, что достигается наличием газовой фазой в углублениях текстуры (состояние Касси). Длина скольжения на такой композитной поверхности представляет собой некоторую усредненную (эффективную) величину, которая может достигать нескольких десятков микрон [5], приводя к значительному (на масштабах микрофлюидики) усилению ряда гидродинамических явлений, в том числе электроосмотического течения. Таким образом, комбинация явлений электроосмоса и супергидрофобного скольжения позволит достичь гигантского эффекта в очень тонких (< 10 мкм) каналах. Кроме того, особые свойства геометрии текстуры (например, выраженная анизотропия) могут привести к физически новым результатам (анизотропии электроосмотического течения, перекрёстным кинетическим эффектам и др.) [6]

В данной работе рассматривается электроосмотическое течение симметричного электролита, возникающее вблизи супергидрофобной плоскости в состоянии Касси, представляющей собой периодический массив скользких и нескользящих участков-полос (т.н. «страйп-текстуры»), заряженных соответственно с поверхностной плотностью  $q_2$  и  $q_1$ . Таким образом, в общем случае поверхность анизотропная с неоднородным распределением заряда.

Электроосмос вблизи анизотропной поверхности характеризуется с помощью тензора  $\mathbf{M}$  электроосмотической подвижности [7], который связывает скорость электроосмоса и тангенциальную компоненту напряженности электрического поля:  $U_{eo} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_t$ . В отличие от предшествующих работ [7, 8] рассматривается случай неидеального скольжения на участках контакта жидкости и газа.

В рамках используемой модели распределение электрического потенциала подчиняется линеаризованному уравнению Пуассона-Больцмана. Динамика жидкости описывается с помощью уравнений Стокса. Рассматриваются две ситуации: когда электрическое поле параллельно и ортогонально полосам супергидрофобной текстуры, т.е. приложено в главных направлениях тензора  $\mathbf{M}$ .

Нами получены аналитические выражения для главных значений тензора электроосмотической подвижности в пределах тонкого и широкого (по сравнению с периодом текстуры) двойного электрического слоя. В общем случае произвольного ДЭС решение найдено численно. В зависимости от соотношения зарядов  $q_2$  и  $q_1$ , локальной длины скольжения  $b$  и доли скользкой фазы на поверхности  $\square_2$  течение может быть как анизотропным, так и проявлять эффективный изотропный характер (несмотря на анизотропную геометрию текстуры). Показано, что усиление электроосмотического течения по сравнению с гладкой поверхностью невозможно, если скользкие участки не заряжены ( $q_2=0$ ). С другой стороны, наличие скольжения может приводить к возникновению ненулевого среднего течения, даже если средний заряд поверхности ( $\square_1 q_1 + \square_2 q_2$ ) равен нулю. В случае, когда заряды скользкой и нескользкой фазы имеют противоположный знак, вблизи супергидрофобной поверхности возникают вихри, характерный размер и структура которых определяется соотношением зарядов  $q_2/q_1$ , величиной радиуса Дебая и параметрами текстуры.

Результаты данной работы показывают, что комбинация электроосмоса и супергидрофобного скольжения является эффективным способом преобразования электрической энергии в механическую энергию жидкости в микроустройствах. Кроме того, возникновение вихрей и генерация поперечного течения вблизи неоднородно заряженных анизотропных поверхностей могут быть одним из путей решения проблемы перемешивания жидкости в микрофлюидике.

### Литература

1. Squires T. M., Quake S. R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale// Rev. Mod. Phys. 2005, **77**, p. 977–1026.
2. Муллер В.М., Сергеева И.П., Соболев В.Д., Чураев Н.В. Учет граничных слоев в теории электрокинетических явлений. // Коллоид. журн. 1986. Т. **48**, N 4, С. 718 - 727.
3. Joly L., Ybert C., Trizac E., Bocquet L. Hydrodynamics within the electric double layer on slipping surfaces// Phys. Rev. Lett., 2004, **93**, 257805.
4. Vinogradova O.I. Drainage of a thin liquid film confined between hydrophobic Surfaces// Langmuir. 1995, **11**, p. 2213-2220.
5. Rothstein J. P. Slip on Superhydrophobic Surfaces// Annu. Rev. Fluid Mech. 2010, **42**, p. 89-109.
6. Brunet E., Ajdari A. Generalized Onsager relations for electrokinetic effects in anisotropic and heterogeneous geometries// Phys. Rev. E. 2004, **69**, 016306.
7. Squires T.M. Electrokinetic flows over inhomogeneously slipping surfaces. // Phys. Fluids. 2008, **20**, 092105.
8. Bahga S.S., Bazant M. Z., Vinogradova O. I. Anisotropic electro-osmotic flow over superhydrophobic surfaces.// J. Fluid Mech. 2008, 613, 125-134.

**Динамическое взаимодействие магнонов в орторомбическом антиферромагнетике во внешнем магнитном поле.****Шарафуллин Ильдус Фанисович***аспирант**Башкирский государственный университет,**физический факультет, Уфа, Россия**E-mail: SharafullinIF@yandex.ru*

Поиск новых магнитоупорядоченных материалов, обладающих уникальными физическими характеристиками, стимулирует исследования физических систем, подверженных влиянию различных внешних воздействий. В работе исследуется орторомбический антиферромагнетик, помещенный в постоянное внешнее магнитное поле.

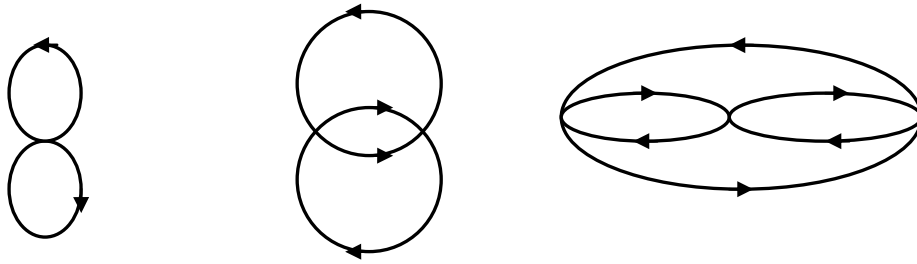
В гамильтониане антиферромагнетика будем учитывать однородное и неоднородное обменное взаимодействие, анизотропию, зеемановскую энергию. Гамильтониан в терминах операторов рождения и уничтожения магнонов будет содержать энергию невзаимодействующих друг с другом спиновых волн  $H_2$ , а также энергию динамического взаимодействия спиновых волн  $H_4$ .

$$H_2 = \sum_{k\alpha} \varepsilon_{k\alpha}^M c_{k\alpha}^+ c_{k\alpha}, \quad H_{4M} = J^{\alpha\beta} \Delta(k_\alpha - k'_\alpha + k_\beta - k'_\beta) c_{k\alpha}^+ c_{k\alpha}^+ c_{k\alpha} c_{k\alpha}.$$

Для того, чтобы определить вклад в свободную энергию, вызванный динамическим взаимодействием спиновых волн, введем функцию Грина, определив ее с помощью операторов рождения и уничтожения частиц. Одночастичная функция Грина определяется следующим образом:

$$G(\vec{k}_1\tau_1; \vec{k}_2\tau_2) = -\langle T_\tau c_{k_1}(\tau_1) c_{k_2}^+(\tau_2) \rangle,$$

где  $c_{k_1}(\tau_1)$  и  $c_{k_2}^+(\tau_2)$  операторы рождения и уничтожения в Гейзенберговском представлении. Ввиду громоздкости полученного соотношения приведем диаграммы для данного вклада (Рис. 1):

Рис. 1. Графический ряд для  $\Delta F$ .

В работе показано, что динамическое взаимодействие спиновых волн в антиферромагнетике уменьшается под воздействием внешнего магнитного поля. Однако динамические эффекты вносят существенные поправки во взаимодействие магнитоупругой и магнитоэлектрической подсистем антиферромагнетика при низких температурах.

### Литература

1. Барьяхтар В.Г., Криворучко В.Н., Яблонский Д.А. Функции Грина в теории магнетизма. Киев: Наукова думка. 1984.
2. Савченко А.М., Садовникова М.Б., Карчев И.Г. Вестник Московского университета. 2008, Серия 3, Физика. Астрономия, №6.

**Дробно-степенной подход к проблеме электрон - фононного взаимодействия****Алисултанов ЗЗ, Нухов АК***студент**Дагестанский государственный университет, физический факультет, Махачкала, Россия.**E-mail: zaur0102@mail.ru*

Очень важным при исследовании неоднородных квантовых систем является учет взаимодействия частиц, относящихся к разным компонентам. Однако большинство таких моделей строятся на предположении, что каждая компонента системы является идеальным газом. Учет взаимодействия между частицами одной компоненты может изменить картину даже качественно.

В системе многих частиц, взаимодействие между ними может привести к появлению квазичастиц. Взаимодействие между последними приводит, вообще говоря, к изменению зависимости кинетической энергии от импульса [1,2], в частности может привести к дробно степенной зависимости,

$$E \sim |p|^\alpha, \quad (1)$$

где  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $p$  - безразмерная переменная, связанная с размерной соотношением  $p = q/q_0$ ,  $q_0$  - некоторый характерный импульс системы.

Использование дробно степенного закона дисперсии позволяет объяснить многие, представляющие интерес, экспериментальные результаты. В данной работе рассматривается электрон - фононная система. Модель, учитывающая электрон - фононное взаимодействие строится исходя из квадратичного закона дисперсии и дает для амплитуды взаимодействия зависимость [3]

$$A(q) \sim q^{1/2}.$$

Но эта модель не учитывает различных механизмов электрон - фононного взаимодействия и с целью улучшения совпадений с экспериментальными данными эту функцию видоизменяют, а именно меняют степень зависимости от импульса уже на чисто феноменологическом уровне [3]. Но если исходить из дробно - степенной зависимости (1), то можно получить

$$A(q) \sim q^{1/\alpha},$$

что позволяет получить совпадение с экспериментом.

Таким образом, дробно степенной подход к проблеме электрон - фононного взаимодействия может дать широкий класс решений, с помощью которых можно объяснить различные эксперименты.

**Литература.**

4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика, часть 2. – М.: Наука, 1978.

5. *Каданов, Г. Бейм.* Квантовая статистическая механика. - М.: Мир, 1964.
6. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Том 4. Квантовая статистика. - М.: Едиториал УРСС, 2002

**Диффузия в трубах с альтернирующим диаметром****Антипов Анатолий Евгеньевич**

Студент

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,**физический факультет, Москва, Россия**E-mail: 89636941963antipov@gmail.com*

В трубах постоянного сечения наличие стенок никак не сказывается на продольной диффузии частиц. Любая неоднородность сечения замедляет диффузию: расширения, способствуя увеличению посещаемого частицей объема, играют роль энтропийных ям, тогда как сужения, затрудняя переходы частицы из одной области в другую, – энтропийных барьеров. Учет энтропийных эффектов в диффузионном транспорте приводит к ряду неожиданных, ярких результатов, представляющих интерес при изучении миграции частиц в пористых материалах, каналах биологических и синтетических мембран, нанотрубках, а также ряда других физико-химических и биологически значимых процессов.

Рассмотрена простая, важная для приложений модель, в которой энтропийные эффекты ярко выражены: частица диффундирует в трубе, состоящей из периодически чередующихся широких и узких участков. На больших временах оправдано огрубленное описание, при котором движение частицы рассматривается как свободная диффузия вдоль оси трубы с эффективным коэффициентом диффузии  $D_{\text{eff}}$ , зависящим от параметров трубы. В случае достаточно длинных широких участков (и произвольных узких)  $D_{\text{eff}}$  находится с помощью метода гомогенизации граничных условий. Если же широкие участки малы, по сравнению с узкими, то они играют роль «застойных зон» и расчет  $D_{\text{eff}}$  основан на теории, предложенной в работе [2]. Обсуждена зависимость  $D_{\text{eff}}$  от параметров модели и найдено их значение, при котором имеет место предельное замедление диффузии, обусловленное энтропийными эффектами.

Полученные формулы находятся в хорошем согласии с результатами компьютерного моделирования, выполненного методом броуновской динамики. Также с хорошей точностью с результатами моделирования совпадают полученные аналитические выражения для функции распределения времени прохода частицей одного периода трубы и моменты данной случайной величины.

**Литература**

1. Makhnovskii Yu.A., Berezhkovskii A.M., Zitserman V.Yu. Diffusion in a tube of alternating diameter. Chemical Physics Vol. 370, pages 238-243. 2010.
2. В. Ю. Зицерман, Ю. А. Махновский, Л. Дагдуг, А. М. Бережковский. // Диффузия в пористой среде с застойными зонами: анализ методами теории диффузионно-контролируемых реакций. Журнал физической химии т.82, №12, сс. 2265–2270. 2008.

**Фермионы в кулоновских и Ааронова-Бома потенциалах в 2+1 измерениях***Ли Киан**Аспирант**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,**физический факультет, Москва, Россия**E-mail: skyangel26@gmail.com*

Интерес к физическим явлениям в квантовых системах релятивистских фермионов в присутствии интенсивных внешних полей в пространствах пониженных размерностей, проявляемый в последние годы, вызван открытием ряда эффектов физики конденсированных сред, возможностью применения полученных для этих моделей результатов для изучения эффекта Ааронова—Бома [1], квантового эффекта Холла [2], высокотемпературной сверхпроводимости [3], а также физических процессов в присутствии космических струн. В частности, поведение фермионов в поле космической струны можно описать решениями уравнения Дирака в потенциале Ааронова--Бома в 2+1 измерениях [4]. Решения уравнения Дирака для фермионов нулевой массы в 2+1 измерениях описывают состояния фермионов в графене [5].

Известно [6], что гамильтониан в уравнении Шредингера с потенциалом Ааронова--Бома сингулярен и поэтому требует дополнительного доопределения для того, чтобы его можно было трактовать как самосопряженный квантовомеханический оператор. Для этого необходимо указать его область определения в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций. Впервые самосопряженный гамильтониан для этой задачи был построен в [6]. В большинстве физически интересных задач квантовой механики гамильтонианы являются сингулярными операторами, а, в естественных областях определения, только симметрическими операторами. Поэтому возникает задача построения самосопряженного гамильтониана во всей области определения. Для решения этой задачи нужно найти все самосопряженные расширения данного симметрического оператора и затем выделить корректный самосопряженный гамильтониан с помощью физически приемлемых граничных условий в точке сингулярности гамильтониана.

Впервые задача построения самосопряженного дираковского гамильтониана в потенциале Ааронова--Бома в 2+1 измерениях была решена в [7]. Так, в [7] было показано, что область определения самосопряженного расширения гамильтониана может содержать, наряду с регулярными, сингулярные, квадратично интегрируемые при  $\Gamma=0$  функции, а также было найдено формальное решение, описывающее связанное состояние фермиона в поле космической струны.

Другой интересный, с точки зрения физики, случай сингулярного гамильтониана - дираковский гамильтониан в сильном кулоновском поле точечного заряда (источника). Построение самосопряженного гамильтониана в этом поле во всей области позволит ответить на вопрос о стабильности вакуума квантовой электродинамики в присутствии сильного кулоновского поля. Важнейший вопрос о стабильности вакуума был всесторонне изучен в многочисленных работах (см. [8, 9] и ссылки там).

Впервые самосопряженные дираковские гамильтонианы в сильном кулоновском поле точечного источника построены в [10].

В работе [11] установлено, что радиальные гамильтонианы в кулоновском поле точечного источника в 3+1 измерениях и в кулоновских и Ааронова--Бома потенциалах в 2+1 измерениях, фактически, одинаковы за исключением того, что гамильтониан в 2+1



измерениях содержит параметр, характеризующий спин фермиона, явно. Это позволяет изучить влияние спина частицы на релятивистские связанные состояния фермиона в двумерных кулоновских полях и в потенциале Ааронова--Бома.

В предлагаемой работе мы представляем математически строгое квантово-механическое описание движения фермиона в двумерных кулоновских (векторном и скалярном) полях и в потенциале Ааронова--Бома. Для этого мы находим все самосопряженные дираковские гамильтонианы в кулоновских и Ааронова--Бома потенциалах в  $2+1$  измерениях с учетом спина фермиона. Затем мы получаем уравнения, неявно определяющие спектры дираковских гамильтонианов в указанных внешних полях и обсуждаем вопрос о собственных функциях всех самосопряженных гамильтонианов. Решение этих задач проводится методами теории самосопряженных расширений (Дж. фон Неймана) симметрических операторов и направляющих функционалов Крейна. В нашей работе мы используем результаты статьи [10], в которой эти методы получили дальнейшее развитие.

Автор выражает благодарность научному руководителю В.Р. Халилову, за поддержку исследований.

#### Литература

1. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev., 115, 485 (1959)
2. The Quantum Hall Effect, 4th ed. Editors: R.E. Prange, S.M. Girvin, New York: Springer, 1990
3. F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity, World Scientific, Singapore, 1990
4. M.G. Alford and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett., 62, 1071 (1989)
5. Novoselov et al, Nature, 438, 197 (2005)
6. И.В. Тютин, Рассеяние электронов соленоидом, препринт ФИАН № 27 (1974)
7. Ph. Gerbert, Phys. Rev. D, 40, 1346 (1989)
8. Я.Б. Зельдович, В.С. Попов, УФН, 14, 673 (1971)
9. А.Б. Мигдал, Фермионы и бозоны в сильных полях, Наука, М., 1978
10. Б.Л. Воронов, Д.М. Гитман, И.В. Тютин, ТМФ, 150(1), 41 (2007)
11. В.Р. Халилов, ТМФ, 158(2), 210 (2009)

**Потери энергии при столкновении заряженных частиц с осциллятором****Макаров Дмитрий Николаевич***Сотрудник, к.ф.-м наук**Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия**E-mail: [makarovd0608@yandex.ru](mailto:makarovd0608@yandex.ru)*

Рассмотрены потери энергии быстрых заряженных частиц с зарядом  $Z$  при столкновениях со скоростью  $v$  с трёхмерным осциллятором. Если задачу решать в дипольном приближении, то известны точные волновые функции для поставленной задачи [1]. В этом приближении задача решается точно, и находятся потери энергии быстрой заряженной частицы из начальных состояний осциллятора  $|m\rangle = |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  в виде суммы одномерных интегралов. Следует сказать, что ранее потери энергии заряженных частиц из  $|m\rangle = |0\rangle$  состояния осциллятора были подробно изучены в работах [2,3], но все расчёты проводились в рамках теории возмущения, что конечно ограничивает область применимости теории, в нашем рассмотрении ограничения  $Z/v \ll 1$  нет. Также проведены предельные переходы в классическую физику, теорию возмущения и случай больших скоростей, результатом чего являются достаточно простые формулы. Также показано, что в случае больших скоростей потери энергии можно разделить в виде суммы поправок к теории Бете, которыми являются непertурбативная поправка, поправка Баркаса, оболочечная поправка. Кроме того, выписаны выражения для потерь энергии в виде сумм в первом порядке теории возмущений в широком диапазоне скоростей, для оболочечной поправки с  $|m\rangle = |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  состояний. Проведено обобщение на случай столкновения заряженной частицы с  $N$  осцилляторами. Показано, что поправки к теории Бете имеют сходство с аналогичными поправками в других теориях, кроме непertурбативной оболочечной поправки [4], которая возникает, как было показано в [4] в области параметров удара  $b \sim s$ , где  $s$  - координата электрона мишени, что и должно быть т.к. в дипольном случае  $b \gg s$ .

Следует сказать, что полученные выражения могут быть использованы для решения физических задач по расчёту потерь энергии описываемых уравнением Шредингера [1], кроме того, проведён анализ и представлены не только общие решения, но и их, более простые, частные решения. Кроме того, существует и методический интерес по выводу непertурбативной поправки, которая, неплохо согласуется с поправкой Блоха. Определены границы применимости представленной теории к потерям энергии на атомах. Подробно проанализирована каждая поправка к теории Бете. Также следует сказать, что развитая теория является точным решением уравнения Шредингера [1], что, несомненно, представляет теоретический интерес.

**Литература**

- [1] Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
- [2] Sigmund P., Haagerup U.: Bethe stopping theory for a harmonic oscillator and Bohrs oscillator model of atomic stopping, Phys. Rev. A, V 34, p.892, 1986.
- [3] Hennig H.M., Sigmund P.: Barkas effect in electronic stopping power: Rigorous evaluation for the harmonic oscillator, Phys. Rev. A, V 40, p.101,1988.
- [4] Матвеев В.И., Макаров Д.Н., Гусаревич Е.С. К теории потерь энергии быстрыми заряженными частицами // Письма в ЖЭТФ, том 92, стр.317, 2010.

**Нарушение закона Ципфа-Мандельброта****в ранговом анализе свойств металлов***Е. В. Валежанина, М.В. Дятлова**Ульяновский государственный университет,**Инженерно-физический факультет высоких технологий, Ульяновск, Россия**E-mail: Kat-valezhanina@yandex.ru*

В работе исследовались ранжированные распределения теплопроводности и модуля Юнга металлов, построенные с помощью [1, 2] и представленные на Рис. 1 и 2. Показано, что эти распределения отличаются от универсального рангового закона Ципфа [1]:  $w(r) = A/r^\alpha$ . Здесь  $r$  – ранговый номер,  $w(r)$  – соответствующие значения ранжируемого параметра,  $\alpha$  – скейлинговый показатель. Отличие проявляется в появлении излома и наличии двух степенных участков рангового распределения. В работе исследуются статистические и связанные с ними физические причины этого различия. Обсуждается возможность применения методов рангового анализа в материаловедении.

Ципф вывел свой закон в количественной лингвистике при анализе частоты появления слов определенной длины в большом тексте [3]. Этот же закон появляется при анализе размеров городов, численности популяций, различных экономических показателей и т. д. [4, 5]. В настоящее время этот закон претендует на роль универсального рангового распределения при анализе сложных замкнутых систем, поэтому представляет интерес выяснение причин этой универсальности и механизмов отклонения от закона для конкретных систем.

Перлин [6] связал обратный степенной закон Ципфа для  $\alpha=1$  с двумя ключевыми вопросами теории вероятностей: центральной предельной теоремой (ЦПТ) и задачей о случайном разбиении единичного интервала. Таким образом, отклонение от закона Ципфа с  $\alpha=1$  может быть вызвано нарушением (ЦПТ) или неравномерностью случайного разбиения интервала. Важнейшие условия ЦПТ заключаются в независимости суммируемых случайных величин и конечности дисперсии (ограниченности флуктуаций). Следовательно, ее нарушение может быть вызвано наличием корреляций или расходимостью второго момента.

Специалисты-физики заинтересовались законом Ципфа благодаря одной из работ Мандельброта [7]. Он ввел модификацию этого закона с учетом иерархических (фрактальных) свойств системы:  $w(r) = A/(1+Cr)^\alpha$ , где  $C$  – дополнительный подгоночный параметр.

Примечателен тот факт, что распределение Ципфа-Мандельброта удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению [8]

$$\frac{dw}{dr} = -\lambda w^q.$$

Решением этого уравнения является функция,

$$w(r) = \frac{1}{[1 + (q-1)\lambda r]^{1/(q-1)}}$$

которая имеет степенную асимптотику  $w(r) \propto r^{-1/(q-1)}$ . Это нелинейное уравнение является важнейшим в термодинамике неэкстенсивных систем [8, 9] и его решение связано с обобщенной энтропией Цаллиса. В термодинамике неэкстенсивных систем вводится обобщение центральной предельной теоремы для коррелированных случайных величин.

С другой стороны, хорошо известно, что распределения со степенными хвостами (например, устойчивые и дробно-устойчивые) являются решениями уравнений с дробными производными [10]. При этом устойчивые распределения являются предельными для суммы независимых случайных величин с расходящейся дисперсией.

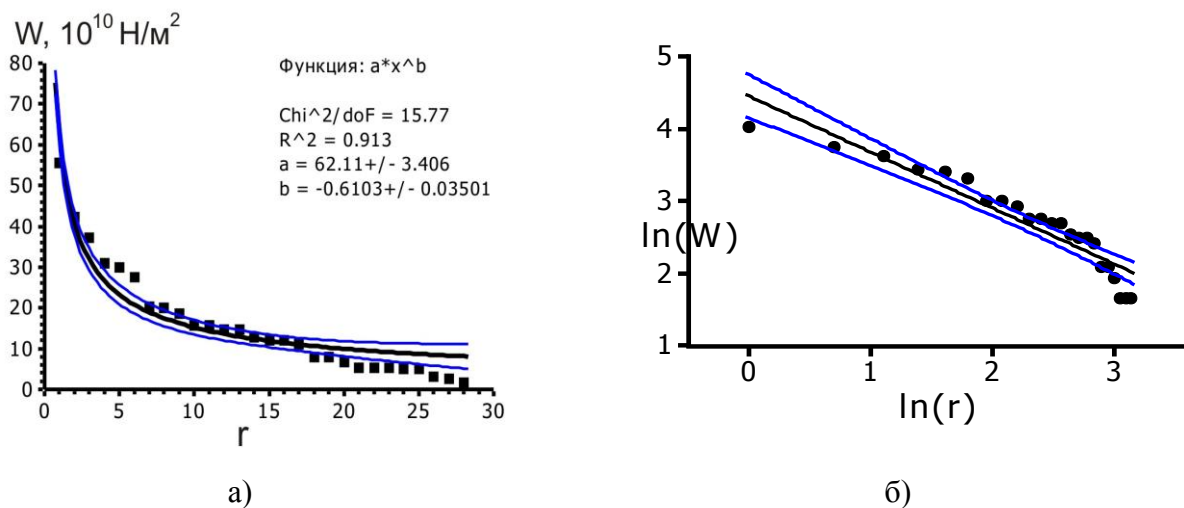
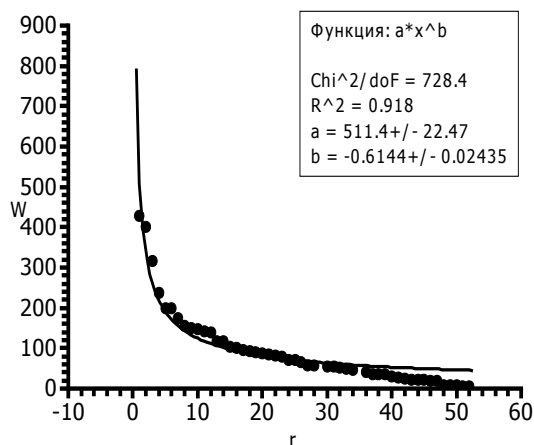
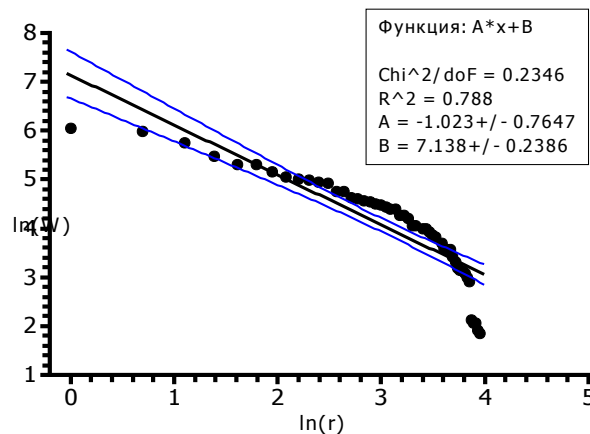


Рис. 1. Ранговое распределение 28 металлов по модулю Юнга, где  $W$  – модуль Юнга,  $10^{10}$ ,  $\text{Н/м}^2$ ;  $r$  – ранговый номер металла. а) График  $W(r)$ ;  $r = 1$  – осмий;  $r = 28$  – свинец;  $A = 56$ ;  $\beta = 0,6$ ;  $R = 0,91$ ; б) График  $\ln W = f(\ln r)$ :  $\beta = 0,94$ ;  $R = 0,82$ .



а)



б)

Рис.2. Ранговое распределение 52 металлов по теплопроводности;  $r$  – ранг; а) график  $W(r)$ ;  $A = 511$ ;  $\beta = 0,6$ ;  $R = 0,92$ ; б) график  $\ln W = f(\ln r)$ ;  $\beta = 1$ ;  $R = 0,79$ .

Наличие излома в ранговом распределении может быть объяснено в рамках модели [8], основанной на эволюционном уравнении с двумя нелинейными слагаемыми, или с помощью концепции усеченных распределений Леви [11].

## Литература

1. *Таблицы физических величин. Справочник.* / Под ред. акад. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат (1976).
2. Волков А.И., Жарский И.М. *Большой химический справочник.* – Минск: Современная школа (2005).
3. George K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of least Effort.* Addison–Wesley (1949).
4. Gabaix, X. Zipf's law for cities: An explanation. *Quart. J. Econ.* 114, 739–767 (1999).
5. Zanette D. H. Zipf's law and the creation of musical context. *Musicae Scientiae* 10, 3–18 (2006).
6. Perline R. Zipf's law, the central limit theorem, and the random division ... *Phys Rev. E* 54, 220 (1996).
7. B. Mandelbrot, *Information Theory and Psycholinguistics: A Theory of Words Frequencies*, in *Readings in Mathematical Social Science*. P. Lazafeld and N. Henry, Editors, Cambridge MA, MIT Press (1966).
8. Montemurro M. A. Beyond the Zipf-Mandelbrot law in quantitative linguistics. arXiv0104066v2 (2001)
9. C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, 52, 479 (1988)
10. Сибатов Р. Т., Учайкин В. В. Успехи физ. наук 10, 1079 (2009).
11. Mantegna R. N., Stanley H. E. Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: The truncated Levy flight. *Phys. Rev. Letters* 73, 2946 (1994).

**Рождение прямых фотонов в адронных столкновениях в подходе  $k_T$ -факторизации  
квантовой хромодинамики***Малышев М.А.**Аспирант**Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, Москва, Россия  
E-mail: malyshev@theory.sinp.msu.ru*

В данной работе исследовались процессы инклюзивного и ассоциативного рождения прямых фотонов со струями в адронных столкновениях при энергиях коллайдеров Tevatron и LHC в рамках  $k_T$ -факторизационного подхода. При энергиях современных коллайдеров такие процессы относятся к области малых значений бьёркеновской переменной  $x$ , а их сечения зависят от эволюционной динамики партонных распределений. В области малых  $x$  эволюционная динамика определяется уравнениями ВФКЛ [1] для неинтегрированных партонных распределений, зависящих от поперечных импульсов начальных взаимодействующих партонов. Матричные элементы подпроцессов квантовой хромодинамики (КХД) также должны зависеть от поперечных импульсов партонов. Оба эти обстоятельства учитываются в  $k_T$ -факторизационном подходе КХД [2].

Исследование процессов рождения прямых фотонов дает возможность изучить эволюционную динамику, поскольку нет необходимости вводить дополнительные механизмы адронизации в конечном состоянии.

В данной работе были использованы неинтегрированные функции распределения KMR [3] и глюонные функции распределения, полученные с помощью уравнения ССФМ [4]. Рассматривались следующие партонные подпроцессы в низшем порядке теории возмущений [5]:

$$\begin{aligned} q^* + \bar{q}^* &\rightarrow g + \gamma \\ q^* + g^* &\rightarrow q + \gamma \\ g^* + g^* &\rightarrow q + \bar{q} + \gamma \end{aligned}$$

где начальные кварки и глюоны находятся вне массовой оболочки с виртуальностью, пропорциональной квадрату их поперечного импульса. В численных расчетах ренормализационный и факторизационный масштабы КХД были выбраны равными  $m_R^2 = m_F^2 = \xi^2 p_T^2$ , где  $p_T$  – поперечный импульс фотона. Для изучения теоретических неопределенностей, связанных с выбором масштабов,  $\xi$  варьировалось в пределах  $1/2 < \xi < 2$ .

Для вычисления дифференциальных и полных сечений была написана программа на языке программирования C++. Многомерное интегрирование проводилось с помощью подпрограммы VEGAS [6].

В рамках используемого подхода было получено достаточно хорошее описание экспериментальных данных коллаборации D0 [7] для рождения прямых фотонов при энергиях коллайдера Tevatron. На основании этого впервые были описаны экспериментальные данные для процессов инклюзивного рождения прямых фотонов, недавно полученные коллаборациями CMS [8] и ATLAS [9] на коллайдере LHC.

### Литература

- Э.А. Кураев, Л.Н. Липатов, В.С. Фадин, ЖЭТФ **71**, 443 (1976), **72**, 199 (1977); Ю.Ю. Балицкий, Л.Н. Липатов, ЯФ **28**, 1597 (1978).
- L.V. Gribov, E.N. Levin, M.G. Ryskin, Phys. Rep. **100**, 1 (1983); Е.М. Левин, М.Г. Рыскин, Ю.М. Шабельский, А.Г. Шуваев, ЯФ **53**, 1059 (1991); S. Catani, M. Ciafaloni, F. Hautmann, Nucl. Phys. **B 366**, 135 (1991); J.C. Collins, R.K. Ellis, Nucl. Phys. **B 360**, 3 (1991).
- M.A. Kimber, A.D. Martin, M.G. Ryskin, Phys. Rev. **D 63**, 114027 (2001); G. Watt, A.D. Martin, M.G. Ryskin, Eur. Phys. J. **C 31**, 73 (2003).
- H. Jung, arXiv:hep-ph/0411287.
- A.V. Lipatov, N.P. Zotov, J. Phys. **G 34**, 219 (2007); S.P. Baranov, A.V. Lipatov, N.P. Zotov, Phys. Rev. **D 77**, 074024 (2008).
- G.P. Lepage, J. Comput. Phys. **27**, 192 (1978).
- B. Abbott et al. (D0 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **84**, 2786 (2000).
- CMS Collaboration, arXiv:1012.0799 [hep-ex] (2010).
- ATLAS Collaboration, arXiv:1012.4389 [hep-ex] (2010).

**О возможности появления новых солитонных решений в бозон-фермионных смесях.****Зезюлин К.В.***Студент**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
физический факультет, Москва, Россия  
E-mail: konstantin.zez@mail.ru*

В последние годы появляется большое число работ, которые посвящены конденсату Бозе-Эйнштейна. В частности, актуальным является исследование солитонных решений. Так в работе [1] экспериментально изучаются некоторые свойства темного солитона в конденсате Бозе-Эйнштейна. А в работе [2] теоретически рассматривают возможность появления солитонов в смеси бозонов и фермионов.

В данной работе исследуется динамика возмущений малой амплитуды в бозон-фермионной системе с короткодействующими потенциалами взаимодействия. В рассматриваемых условиях решения появляются только при учете третьего порядка по радиусу взаимодействия [3] и являются новыми типами солитонов в конденсате Бозе-Эйнштейна и бозон-фермионной смеси. За основу берутся уравнения непрерывности и баланса импульса (уравнение Эйлера), которые выводятся методами квантовой гидродинамики [3]. Все уравнения и их решения рассматриваются с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

В данной работе используется метод, предложенный в работе [4]. Полученное таким образом уравнение для возмущения является уравнением Кортевега-де Фриза. А сами возмущения имеют вид солитонов:

$$n = n_{0b} + \varepsilon \cdot n_{1b},$$

$$n_{1b} = -\frac{s}{3pv} \frac{1}{\left[ \operatorname{sh} \left( \sqrt{-\frac{vp}{4q}} \eta \right) \right]^2},$$

$p, q, s$  – коэффициенты, которые находятся из исходных уравнений, и имеющие довольно сложный вид. Причем либо  $p$ , либо  $q$  принимает отрицательное значение (в зависимости от типа ветви решения – бозонной или фермионной).

$v$  – скорость распространения волны.

Анализ решений показал, что учет третьего порядка по радиусу взаимодействия приводит к существованию солитонных решений, которые невозможно предсказать при рассмотрении только первого порядка (приближение Гросса-Питаевского). Новое решение появляется при рассмотрении фермионной ветви при условии на коэффициент фермион-фермионного взаимодействия (что соответствует отталкиванию между фермионами)  $Y_{2ff} < -10^{-49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^5$ . В бозонной части получившихся решений также появляется новое солитонное решение.



Решения существуют при больших по модулю значениях констант взаимодействия, которые можно достигнуть по средствам резонанса Фешбаха [5], [6], а также концентрациях  $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

Автор выражает благодарность профессору, д.ф.-м.н. Кузьменкову Л. С. и к.ф.-м.н. Андрееву П. А.

#### Литература

4. S. Burger, et al., Phys. Rev. Lett. 83, 5198(1999)
5. T. Karpiuk, et al., Phys. Rev. Lett. 93, 100401 (2004)
6. P. A. Andreev, L. S. Kuzmenkov, PhysRevA. 78, 053624 (2008)
7. B. C. Kalita, R. Das, Plasma Phys. 5, 3588 (1998)
8. Cheng Chin, et al., Rev. Mod. Phys. 82, 1225 (2010)
9. I. Bloch, et al., Rev. Mod. Phys. 80, 885 (2008)

**Частицы Дирака и Шредингера в квазиодномерных системах с кулоновским взаимодействием****Хомовский Дмитрий Игоревич***Аспирант**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,**Физический факультет, Москва, Россия**E-mail: lel0lel@mail.ru*

Поведение заряженных частиц в квазиодномерных системах с кулоновским взаимодействием является в настоящее время объектом интенсивных исследований в связи с постоянно растущим количеством различных физических приложений [1,2]. В настоящей работе рассмотрена задача о стационарных состояниях квантовой частицы в потенциале  $V(z) = -\alpha/(|z| + \delta)$ , где  $\delta$  - параметр регуляризации, и показано, что ее энергетический спектр при  $\delta \rightarrow 0$  становится принципиально различным для дираковского и шредингеровского случаев.

Одномерное уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом («одномерный атом водорода») детально исследовано [3,4]. Для этой задачи в пределе  $\delta \rightarrow 0$  возникает существенная неоднозначность в выборе граничных условий при  $z = 0$  и, соответственно, в структуре энергетических уровней, что находит применение в ряде актуальных приложений, в частности, при описании свойств экситонных возбуждений в углеродных нанотрубках [1]. «Каноническое» квантовомеханическое граничное условие  $\psi(0) = 0$  при этом соответствует наиболее очевидной физической картине, когда кулоновская сингулярность фактически играет роль непроницаемой стенки. При этом спектры четных и нечетных уровней совпадают, а нижний четный уровень уходит в  $-\infty$ , причем ВФ уровня становится сингулярной с дельта-образной интегрируемой особенностью.

Уравнение Дирака, в отличие от уравнения Шредингера, для таких систем до настоящего времени практически не рассматривалось. Точное решение уравнения Дирака для регуляризованного потенциала, полученное в настоящей работе, показало нетривиальное различие этих задач при малых значениях параметра регуляризации. В частности, при  $\delta \rightarrow 0$  точный энергетический спектр дираковской частицы обладает периодичностью по  $\ln \delta$  - спектры совпадают при  $\ln \delta \rightarrow \ln \delta - \pi/\alpha$ , а при сдвиге  $\ln \delta$  на  $\pi/2\alpha$  четные и нечетные уровни меняются местами. При  $\delta \rightarrow 0$  нижние уровни будут последовательно опускаться в отрицательный континуум с периодом  $\pi/2\alpha$  по переменной  $\ln \delta$ , четность основного состояния будет все время меняться, а число нулей его ВФ увеличиваться. При этом скорость падения нижнего уровня дираковской частицы значительно меньше, чем в шредингеровском случае, а ВФ имеет конечную минимальную область локализации при нулевой энергии, после чего по мере приближения к отрицательному континууму она снова увеличивается до исходных размеров.

Проведенное исследование показывает, что при наличии в потенциале неинтегрируемой сингулярности такого типа уравнение Шредингера уже не может рассматриваться как нерелятивистское приближение соответствующего уравнения Дирака, так как в последнем случае возникают существенно релятивистские и спиновые эффекты, не имеющие нерелятивистского аналога. Найденные аналитические и численные методы позволяют также определить величину параметра  $\delta$  (глубину ямы), для которой уравнение Шредингера уже неприменимо с требуемой точностью для описания дираковской частицы. Следует подчеркнуть, что задача имеет не только чисто теоретический интерес, она естественным образом возникает в некоторых физических моделях квазиодномерных структур или как нулевое приближение для реалистических двух- и трехмерных задач [5].

### Литература

10. R.J. Elliott, R. Loudon, *J. Phys. Chem. Solids* 15, 196 (1960)
11. M.I. Dykman, P.M. Platzman, P. Seddighrad, *Phys. Rev. B* 67, 155402 (2003)
12. Loudon R *Am. J. Phys.* 27 649 (1959)
13. R.L. Hall, *Phys. Lett. A* 372 (2007)
14. R.V. Jensen, S.M. Susskind, M.M. Sanders, *Phys. Rep.* 201 (1991)

**Случайно-возмущенные динамические системы типа Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии**

***Миронов Павел Павлович***

*Аспирант*

*Ульяновский государственный университет, инженерно-физический факультет*

В докладе излагается общий подход к анализу случайно-возмущенных конечномерных нелинейных динамических систем с помощью метода максимальной энтропии [1-3]. В основе подхода лежит метод Рейнольдса для усреднения уравнений случайно-возмущенной системы по ансамблю. Как известно, система усредненных уравнений Рейнольдса для нелинейных уравнений оказывается незамкнутой вследствие наличия высших моментов случайных величин в усредненных уравнениях. В предлагаемом подходе замыкание уравнений Рейнольдса производится с помощью метода максимальной энтропии, гарантирующего, что полученные с его помощью уравнения для моментов дают распределение с максимально большим числом микросостояний (микротраекторий системы), с помощью которых реализуется каждая усредненная траектория системы. Это обеспечивает максимальную наблюдаемость таких траекторий.

В работе излагаются результаты применения такого подхода к стохастической модели Вольтерра-Лотки для двухвидовой популяции, а также для ее обобщений, таких как модель кинетики радиационного образования кластеров [4] и уравнения Эйлера для вращения твердого тела. Вычислены уравнения усредненной динамики и проанализированы условия устойчивости решений.

**Литература**

1. Журавлев В.М., Шляпин В.А. Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем // Нелинейный мир. 2008. Т. 6. No. 7. С. 352-363.
2. Журавлев В.М. Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии // ЖТФ. 2009. No 1. С. 16-27.
3. Журавлев В.М., Шляпин В.А. Метод сопряженных функций в стохастической динамике одномерных нелинейных систем и принцип вторичного максимума энтропии // Прикладная математика и механика. Ульяновск: УлГТУ. 2009. С. 72-88.

4. Светухин В.В., Голованов В.Н., Рисованый В.Д. Сборник статей. Моделирование поведения под облучением реакторных материалов. Ульяновск: УлГУ, 2007.

**Спин – волновое затухание в низкоразмерных магнетиках при низких температурах.****Нухов А.К.***аспирант**Дагестанский государственный университет, физический факультет, Махачкала, Россия.**abduazim1@mail.ru*

Ранее [1] нами был получен спектр спиновых волн ферромагнетика с учётом «поверхностной» дисперсии. Общее смещение частотного спектра спиновых волн

$$\Delta\omega(k) = \Delta\omega_R(k) + i \cdot \Delta\Gamma(k) \quad (1)$$

отражает здесь только мнимое смещение, поскольку мы показывали, что  $\Delta\omega_R(k) = 0$

Мнимая составляющая  $\Delta\Gamma(k)$  позволяет найти выражение для времени «поверхностной» релаксации  $\tau_s$ :

$$\tau_s = \frac{1}{B \cdot \lambda_n(k, \bar{\mathbf{r}})} \quad (2)$$

Перепишав  $\lambda_n(k, \bar{\mathbf{r}})$  в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_n(k, \bar{\mathbf{r}}) &= k^j \cdot L_j(\bar{\mathbf{r}}) = \\ &= \sum_{m, m_2} k^j \cdot (1+m) \cdot (1 + \hat{\pi}(l, j)) \cdot \delta^{ll'} \cdot (\beta_{m_1})_l \cdot (\beta_{m_2})_j \cdot \tilde{F} \left\{ \begin{matrix} m_1, m_2 \\ l, j \end{matrix} \right\}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3)$$

обнаружим для времени релаксации следующую оценку:

$$\tau_s \sim \frac{\hbar}{6\pi AL} \quad (4)$$

или в численной форме, с учётом того что  $A \approx k_B \Theta$ ,  $\Theta \sim 10^3$  °K ( $\Theta$  – температура Кюри ферромагнетика) для обычных ферромагнетиков, имеем:

$$\tau_s \cong 4,04 \cdot 10^{16} \cdot L^{-1} \text{с} \quad (5)$$

Из (5) видно, что численное значение времени релаксации параметрически зависит от геометрического фактора  $L$ , который определяется локальной геометрией поверхности.

Отметим что  $L < 10^{-3}$  между спиновыми волнами, благодаря наличию щели в спектре, может установиться корреляция в пространственном распределении. При этом непосредственное поверхностное взаимодействие приводит к опосредственному взаимодействию спиновых волн между собой за счёт виртуальных обменов между магнонами «поверхностных» фононов.

**Литература**

1. Казбеков К.К. Мусаев Г.Г. Спиновый гамильтониан Гейзенберга для ферромагнетика с поверхностью. Труды XVII Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». Москва-2000.-с.87-90.

**Какова точность приближения локальной дуальности для упругого пионного форм фактора?****Балакирева И.А.***Аспирантка**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова**Физический факультет, Москва, Россия**E-mail: iraxff@mail.ru*

Цель данной работы – исследовать точность пионного форм фактора, извлеченного из версии правил сумм КХД локальной дуальности [1]. Это правило:

а) основано на дисперсионном трехточечном правиле сумм при бесконечно большом борелевском параметре ( $\tau=0$ ). В этом случае степенные поправки исчезают, и форм фактор задается только пертурбативным спектральным представлением, обрезанным на эффективном пороге континуума  $s_{\text{eff}}(Q)$ ;

б) использует модель для эффективного порога континуума  $s_{\text{eff}}(Q)$ , основанную на гладкой интерполяции между его значениями в нуле (определенным тождеством Уорда) и на бесконечности (определенным факторизацией). В работе [2] представлена простая интерполяционная формула для  $s_{\text{eff}}(Q)$ , которая используется и в данной работе.

Модель локальной дуальности не принимает в рассмотрение детали динамики конфайнмента. Важно понять, какова точность этой модели.

Единственное свойство, которым должна обладать теория, чтобы к ней можно было применить приближение локальной дуальности - факторизация жестких форм факторов. Следовательно, точность модели может быть исследована в квантовой механике для потенциалов, содержащих кулоновское взаимодействие и конфаймент. Соответствующие результаты опубликованы в работе [3].

Основные результаты:

1. Для  $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$  точный эффективный порог, найденный из экспериментальных данных, сильно зависит от  $Q^2$  [4, 5]. Точность приближения локальной дуальности для пионного форм фактора в этой области не очень высокая.

2. Для  $Q^2 > 4\text{--}6 \text{ ГэВ}^2$  для описания пионного форм фактора ожидается точность, большая, чем 20% [3]. Причем она растет с ростом  $Q^2$ .

**Литература**

1. A.V.Radyushkin, Acta Phys. Polon. B26, 2007 (1995).
2. V.Braguta, W.Lucha, and D.Melikhov, Phys. Lett. B661, 354 (2008); W.Lucha and D.Melikhov, arXiv:0812.0323.
3. I.Balakivera, arXiv:4140.
4. W.Lucha, D.Melikhov, and S.Simula, Phys. Rev. D76, 036002 (2007); Phys.Lett. B657, 148 (2007); Phys. Atom. Nucl. 71, 1461 (2008); Phys. Lett. B671, 445 (2009); D.Melikhov, Phys. Lett. Rev. B671, 450 (2009); W.Lucha and D.Melikhov, Phys. Rev. D73, 054009 (2006); Phys. Atom. Nucl. 70, 891 (2007).
5. W.Lucha, D.Melikhov, H.Sazdjian, and S.Simula, Phys. Rev. D80, 114028 (2009); W.Lucha, D.Melikhov, and S.Simula, Phys. Rev. D79, 096011 (2009); J. Phys. G37, 035003 (2010); Phys. Atom. Nucl. 73, 1770 (2010); arXiv: 1003.1463; Phys. Lett. B687, 48 (2010); arXiv: 1008.2698.

**Численное моделирование супердиффузии в бильярдах с подвижными стенками**  
**Краснова А.К.**

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет,  
Москва, Россия

E-mail: sasha\_krasnova@yahoo.com

Бильярдная динамическая система описывает движение материальной точки в некоторой ограниченной области многообразия с условием упругого отражения от границы по закону "угол падения равен углу отражения". Системы бильярдного типа служат полезными моделями в статистической физике, акустике и в некоторых других областях.

Бильярды с осциллирующими границами принадлежат к относительно новой области математической физики. Когда граница бильярда осциллирует, частица сталкивается как со стенками, которые движутся в ту же сторону, так и с теми, которые движутся навстречу. Суммарный эффект этих замедляющих и ускоряющих соударений приводит к неограниченному росту кинетической энергии частицы, называемое ускорением Ферми. Явление ускорения Ферми можно объяснить в терминах термодинамического рассмотрения [1]. Мы рассматриваем одну их хорошо известных бильярдных моделей - газ Лоренца, состоящий из бесконечного числа тяжелых рассеивателей, находящихся в узлах некоторой решетки.

Ускорения Ферми в бильярдах с открытым горизонтом вызывает супердиффузию, т.е. средний квадрат смещения квадратично возрастает со временем, т.е.

$$\langle |x|^2 \rangle \sim t^2.$$

Этот результат был подтвержден численно. Вычисления производилось на языке Fortran. Получено численное соответствие ускорения Ферми аналитическому значению. Показано, что зависимость коэффициента диффузии от геометрических и динамических параметров соответствует аналитической формуле. Был получен график зависимости среднего квадрата смещения частицы от времени, подтверждающий наличие супердиффузии. Было показано, что средняя длина траектории частицы до момента ее выхода из ячейки имеет экспоненциальное распределение. Найдены средние длины траекторий частиц при различных радиусах рассеивателей. Численные значения лучше согласуются с теоретическими при малой вероятности выхода [2]-[5].

**Литература**

1. Лоскутов А.Ю., Краснова А.К., Чичигина О.А. Супердиффузия в бильярдах с подвижными стенками как результат ускорения Ферми // Актуальные проблемы статистической радиофизики. 2008. Т. 7. С. 3.
2. Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Краснова А.К., Чичигина О.А. Бильярды с возмущаемыми границами и некоторые их свойства // Нелинейная динамика. 2010. Т. 7. С. 1-32.
3. Loskutov A.Yu., Chichigina O. A., Krasnova A. K. Superdiffusion in time-dependent open horizon billiards // *Proc. of the International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics "Dynamics Days South America 2010"*. INPE - National Institute for Space Research Sao Jose dos Campos - SP - Brazil - July 26-30. 2010.
4. Krasnova A. K. Numerical simulations of superdiffusion in Lorentz gas // *Proc. Of the International School-Conference "Mathematics and Physics of Billiard-Like Systems"*. Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Rio Claro. Ubatuba - SP - Brazil. 07-10 February 2011. P.62-63



**О релятивистских эффектах в квантовой гидродинамике****Иванов Алексей Юрьевич**

Студент

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Москва, Россия**E-mail: alexiv0@mail.ru*

В последние годы метод квантовой гидродинамики зарекомендовал себя как эффективный метод исследования во многих разделах физики: при исследовании спиновых волн, резонансного взаимодействия пучков нейтронов с веществом, волн в диэлектрических низкоразмерных структурах, а также ультрахолодных квантовых газов [1, 2, 3]. В исследованных ранее физических системах предполагалось, что потоки всех величин имеют скорость много меньшую, чем скорость света. Многие процессы, в частности, динамика пучков частиц, требуют для своего исследования релятивистскую квантовую теорию коллективных процессов в веществе. Такую теорию можно построить в рамках аппарата квантовой гидродинамики. В качестве первого этапа можно ограничиться слабoreлятивистским приближением, которому соответствует гамильтониан Брейта и классический лагранжиан Дарвина [4].

Данная работа посвящена включению релятивистских слагаемых в уравнения квантовой гидродинамики. Эта система уравнений выводится из многочастичного микроскопического уравнения Шредингера. Тип рассматриваемой физической системы определяется заданием гамильтониана. При выводе системы уравнений квантовой гидродинамики мы ограничиваемся уравнениями баланса числа частиц, импульса и энергии, что соответствует известному из классической кинетики пятимоментному приближению. Как и в классической физике, эти уравнения являются незамкнутыми, и в общем случае мы получаем цепочку уравнений типа цепочки Боголюбова в физической кинетике.

На раннем этапе метод цепочки Боголюбова был развит для кулоновского взаимодействия. Позднее рассматривались его обобщения на случай слабoreлятивистских систем [5], используя при этом лагранжиан Дарвина. В этой работе впервые выводится система уравнений квантовой гидродинамики для системы заряженных частиц, исходя из лагранжиана Дарвина и квантуя соответствующий ему гамильтониан.

В качестве первого шага, как и в нерелятивистском случае, мы определяем плотность числа частиц через многочастичные волновые функции физической системы. Далее, дифференцируя её по времени и используя уравнение Шредингера, получается уравнение непрерывности, в котором возникает вектор плотности потока вероятности. Аналогично получаем уравнение эволюции потока вероятности, которое содержит в себе информацию о взаимодействии частиц между собой и внешнем полем. Это уравнение выражает локальное изменение импульса в системе многих частиц и является аналогом уравнения Эйлера. Следующим шагом мы выполнили вывод квантового неравновесного уравнения баланса энергии.

**Литература**

1. П. А. Андреев, Л. С. Кузьменков, М. И. Труханова. Динамика сложных систем. Т. 4. №1. С. 32. 2010.
2. P. K. Shukla, УФН, **180** 55 (2010).
3. F. A. Asenjo, V. Muñoz, J. A. Valdivia, S. M. Mahajan. Phys. Plasmas **18**, 012107 (2011).
4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2001.
5. И. П. Павлоцкий. Введение в слабoreлятивистскую статистическую механику. М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1987.

**Перерасеяние ультракороткого импульса на атомарных и молекулярных отрицательных ионах**

**Юлкова В.М.**

*Аспирант*

*Поморский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия*

*E-mail: [ulkova.vika@gmail.com](mailto:ulkova.vika@gmail.com)*

Ультракороткие импульсы дают возможность изучать явления микромира (исследование движений и передачи энергий), которые происходят за времена сотен аттосекунд [1-4]. Способность контролировать движение электронов, которые являются основным компонентом в структуре любого материала, допускает возможность создания новых состояний материи и новые материалы. Определенным показателем актуальности научных исследований в этой области является присуждение нобелевских премий: А. Зевейл – за результаты исследований в области фемтохимии в 1999 г., Дж. Холл и Т. Хэнш – за разработку прецизионной метрологии оптических частот в 2005 г. [5].

Основной характеристикой отрицательных ионов (ОИ) является энергия связи электрона и захватившего его атома, называется энергией сродства к электрону. Значения сродства к электрону известны не для всех элементов; измерять их весьма трудно. Наиболее велики они у галогенов, имеющих на внешнем уровне по 7 электронов. Отрицательно заряженные ионы всегда имеют большие размеры, чем нейтральные атомы, а избыточный отрицательный заряд приводит к отталкиванию электронов и, следовательно, к ослаблению их связи с ядром. Учитывая слабосвязанность электрона в анионе, характерное время его движения существенно превышает таковое для атомов. Отрицательные ионы существенно влияют на свойства газоразрядной плазмы, выступают в роли ловушек, связывающих электроны. Заряженность этих комплексов позволяет достаточно легко ими управлять, а слабосвязанность с избыточным электроном дает возможность быстрого его высвобождения. Процессы с участием ОИ имеют важное значение в донорно-акцепторных взаимодействиях, окислительно-восстановительных реакциях [6]. ОИ используются в создании электронного и ионного транспорта, процессах перезарядки при управлении потоками частиц при транспортировке пучка в ускорителях и накопителях, при генерации пучков нейтральных частиц большой энергии для нагревания термоядерной плазмы.

Ранее были получены аналитические выражения для спектра переизлучения ультракороткого импульса молекулярным ионом водорода  $H_2^+$  [7]. Авторами сделаны [8] расчеты спектра и сечения переизлучения на ОИ в приближении потенциала нулевого радиуса. Выявлена зависимость спектра переизлучения от частоты импульса, энергии сродства к электрону. В случае молекулярных ОИ появляется зависимость спектра переизлучения и от ориентации иона по отношению к налетающему ультракороткому импульсу. На рис.1 показана зависимость энергии переизлучения от частоты для ОИ металлов

Na, Rb, Cu, Au при продолжительности импульса 1 аттосекунда и напряженности электрического поля, превышающей внутриатомное поле. Очевидно, что значительное различие в спектрах переизлучения для различных ОИ обусловлено значениями энергии сродства к электрону. Это можно использовать, например, для уточнения энергии сродства различных ОИ.

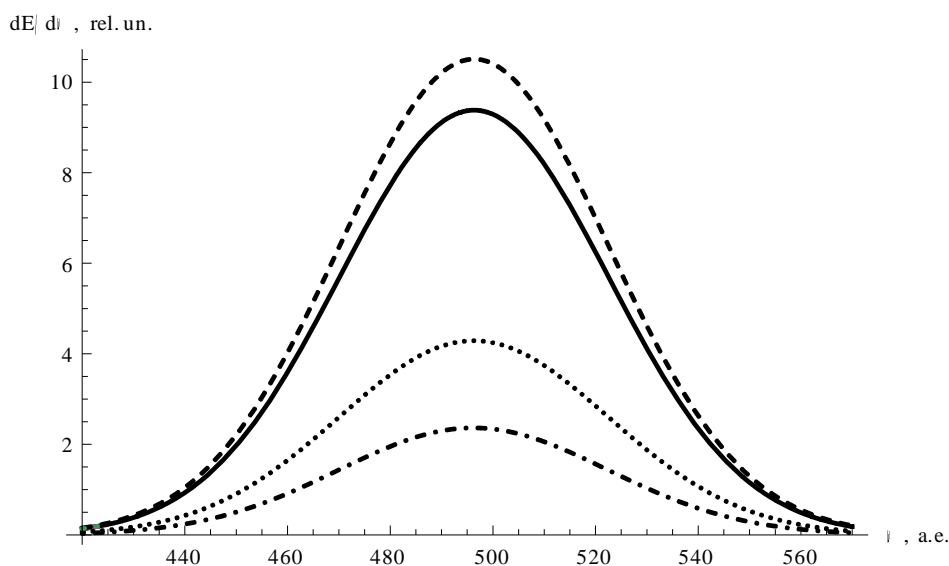


Рис. 1 Зависимость спектра переизлучения импульса на атомарных отрицательных ионах металлов от частоты. Штриховой линией обозначена зависимость для  $\text{Na}^-$ , сплошной линией для  $\text{Rb}^-$ , точечной линией для  $\text{Cu}^-$ , штрихпунктирной линией для  $\text{Au}^-$ .

### Литература

1. Крюков П.Г. Фемтосекундные импульсы. М.:Физматлит, 2008.
2. Ким М.Ю., Рябикин А.М. // УФН. 1999. т. 169, № 1. с.58.
3. Krausz F., Ivanov M. // Rev.Mod.Phys. 2009, V. 81. p. 163.
4. Sansone G., Kelkensberg F., Pérez-Torres J. F. et al. // Nature. 2010. V. 465. P. 766.
5. Козлов С.А., Самарцев В.В. Основы фемтосекундной оптики. М.:Физматлит, 2009.
6. Смирнов Б. М. Отрицательные ионы. М.: Атомиздат, 1978.
7. Есеев М. К., Матвеев В. И. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. вып.23. С. 47.
8. Матвеев В.И., Есеев М.К., Юлкова В.М. Перерассеяние ультракороткого импульса на атомарных и молекулярных анионах // ЖЭТФ. 2011. направлена в печать

### Слова благодарности

Автор выражает благодарность профессору Матвееву В.И., доценту Есееву М.К. за научное руководство и помощь в составлении тезисов.

**Оценка энергии основного состояния квантовых спиновых систем на решетке методом ренормализационной группы в реальном пространстве (RSRG).***Серов А.С.**Аспирант**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Москва, Россия**E-mail: [a.s.serov@gmail.com](mailto:a.s.serov@gmail.com)*

На данный момент точное решение задачи о нахождении энергии основного состояния квантовых спиновых систем на решетке известно только для самых простых моделей. Для более сложных моделей необходимо использовать приближенные методы. Для получения оценок сверху на энергию основного состояния таких систем, в частности, пользуются методом ренормализационной группы в реальном пространстве (Real Space Renormalization Group, или RSRG).

Классический метод RSRG [2] заключается в том, чтобы исходную решетку разбить на блоки, каждому из которых ставится в соответствие узел новой решетки. После этого гамильтониан исходной системы разбивается на внутриблочную часть и часть, описывающую взаимодействие между блоками. Внутриблочный гамильтониан диагонализуются, для каждого блока выбирается несколько низших по энергии состояний, из которых составляется базис пространства состояний узла новой, ренормированной решетки. Взаимодействие между блоками проецируется на новое пространство состояний. Повторение подобных шагов позволяет получить оценку на энергию основного состояния системы.

В настоящей работе используется следующий способ: в качестве базисных векторов блока выбираются не те векторы, которые соответствуют самым низким по энергии состояниям, а векторы, которые позволят получить оптимальную оценку энергии. А именно, из исходных базисных векторов блока составляется несколько линейных комбинаций векторов с переменными коэффициентами, и эти линейные комбинации принимаются за базис пространства состояний узла новой решетки. Аналогично классическому методу указанные шаги повторяются, и в результате получается оценка на энергию основного состояния системы. Минимизацией полученной оценки по включенным параметрам, можно получить наилучший в определенном классе вид векторов для ренормировки для каждой конкретной модели, и, следовательно, более точную оценку сверху на энергию основного состояния системы.

Приведенный выше метод можно еще улучшить, если на разных шагах ренормировки включать разные параметры в базисные векторы. Тогда в конечной оценке на энергию системы будет больше параметров, минимизация по которым даст лучший результат. Однако расчеты для описанной ниже Xh-модели показывают, что увеличение числа параметров приводит к ограниченному улучшению оценки. При дальнейшем увеличении числа параметров точность оценки практически остается неизменной.

Для одномерной квантовой модели Изинга в поперечном магнитном поле (Xh-модель) были проведены расчеты для разного числа узлов в блоке и разного количества варьируемых параметров. Гамильтониан такой системы из  $N$  узлов имеет вид:

$$H = -J \sum_{j=1}^N S_j^x S_{j+1}^x - h \sum_{j=1}^N S_j^z,$$

где  $J$  характеризует взаимодействие между соседними узлами;  $h$  характеризует взаимодействие с полем;  $S_j^x, S_j^z$  – проекции спина в  $j$ -ом узле на оси  $x$  и  $z$  соответственно. Результаты расчетов сравнивались с точным ответом для энергии основного состояния системы [3]:

$$\varepsilon_0(J, h) = -\frac{J}{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{h}{J} \cos k + \left(\frac{h}{J}\right)^2} dk$$

Метод RSRG с варьируемыми параметрами был применен и к более сложным одномерным моделям. Сравнение относительных ошибок расчета энергии основного состояния Xh-, XX- и XXX- моделей классическим методом RSRG [1, 4] и методом RSRG с варьируемыми параметрами приведено в таблице. Относительная ошибка  $\Delta$  вычислялась по формуле  $\Delta = |(\varepsilon_{appr} - \varepsilon_{ex}) / \varepsilon_{ex}|$ , где  $\varepsilon_{ex}$  – точное значение энергии, а  $\varepsilon_{appr}$  – приближенное значение.

Модель	Число узлов в блоке	$\Delta_{RG}$ , % для классического метода RSRG	Число параметров	$\Delta_{RG,var}$ , % для RSRG метода с варьируемыми параметрами
Xh, h/J=1/2	2	3.87	1	3.89
	2		2	2.43
	2		4	1.22
	2		8	1.21
XX	2		1	11.09
	2		2	8.96
	3	11.15	16	6.88
	4		16	5.47
	5	8.04		
	7	6.29		
XXX	2		2	13.23
	2		4	13.09
	3	11.70	4	11.70
	3		16	11.04

Приведенные результаты показывают, что для Xh-модели метод RSRG на 2 узлах с одним варьируемым параметром дает такую же оценку, что и классический метод на 2 узлах, а увеличение количества параметров позволяет заметно повысить точность результата.

Для XX-модели метод RSRG с 2 узлами в блоке и 2 варьируемыми параметрами дает оценку лучше, чем стандартный метод на 3 узлах; с 4 узлами в блоке и 16 параметрами – лучше, чем классический метод с 7 узлами в блоке.

Для XXX-модели метод RSRG с 3 узлами в блоке и 4 варьируемыми параметрами дает такую же оценку, как и классический метод на 3 узлах, а увеличение числа параметров до 16 позволяет еще улучшить оценку.

Простота метода RSRG с варьируемыми параметрами позволяет надеяться, что с его помощью можно получить более точные оценки и для систем большей размерности.

**Литература**

1. Burkhardt T.W., van Leeuwen J.M.J. Real-Space Renormalization. N.Y.: Springer-Verlag, 1982.
2. Langari A. Phase Diagram Of The Anti-ferromagnetic xxz Model in The Presence of An External Magnetic Field // Phys. Rev. B. 1998, Vol. 58, p. 14467–14475.
3. Pfeuty P. The One-dimensional Ising Model with a Transverse Field // Ann. Phys., N.Y. 1977, 57, p. 79–90.
4. Langari A., Karimipour V. A Modified Quantum Renormalization Group for xxz Spin Chain // Mod. Physics B. 1998, Vol. 12, 23, p. 2359–2370.



**Влияние диэлектрической матрицы на управляемый 2D – туннельный перенос в условиях внешнего электрического поля<sup>1</sup>**

**Рудин В.А.<sup>2</sup>**

*Аспирант естественнонаучного факультета (ФЕНР)*

**Кревчик П.В.**

*Студент естественнонаучного факультета (ФЕНР)*

*Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия*

*E-mail: physics@pnzgu.ru*

Исследована проблема управляемости двумерного диссипативного туннелирования в системе «игла кантилевера АСМ/ СТМ – квантовая точка», или в системе взаимодействующих квантовых молекул моделируемых 2D - осциллятором потенциалом, взаимодействующим с термостатом, во внешнем электрическом поле. Методом инстантонов рассчитана вероятность 2D- туннельного переноса и исследована ее зависимость от величины внешнего электрического поля, температуры и величины относительной диэлектрической проницаемости среды – термостата. Выявлены области реализации эффекта 2D – бифуркаций и численно проанализированы соответствующие «фазовые диаграммы», определяющие границы существования 2D – бифуркаций при изменении параметров управления (обратной температуры  $\beta$ , относительной диэлектрической проницаемости среды – термостата  $\epsilon$ , и параметра асимметрии 2D – потенциала системы взаимодействующих квантовых молекул  $b$ , слабо нелинейно зависящего от величины напряженности внешнего электрического поля). Соответствующая «фазовая диаграмма» приведена на рисунке. Экспериментально наблюдаемыми и устойчивыми оказываются предсказанные ранее 2D- туннельные бифуркации с диссипацией для случая параллельно туннелирующих взаимодействующих частиц. Одновременно теоретически разработан метод контролируемого роста КТ в системе с АСМ/ СТМ [2], который может реализовать новые уникальные возможности для выращивания достаточно больших массивов металлических КТ (например, из коллоидного золота) заданных размеров, что имеет перспективные приложения для создания прецизионных устройств для нанoeлектроники, а также многообещающие приложения в области наномедицины.

---

<sup>1</sup> Тезисы доклада основаны на материалах исследований, выполненных в рамках тем. плана проведения фундаментальных научных исследований по заданию Рособразования, № 1.15.09.

<sup>2</sup> Авторы выражают признательность проф. В.Ч. Жуковскому, проф. В.Д. Кревчику, проф. М.Б.Семенову за научное руководство работой.



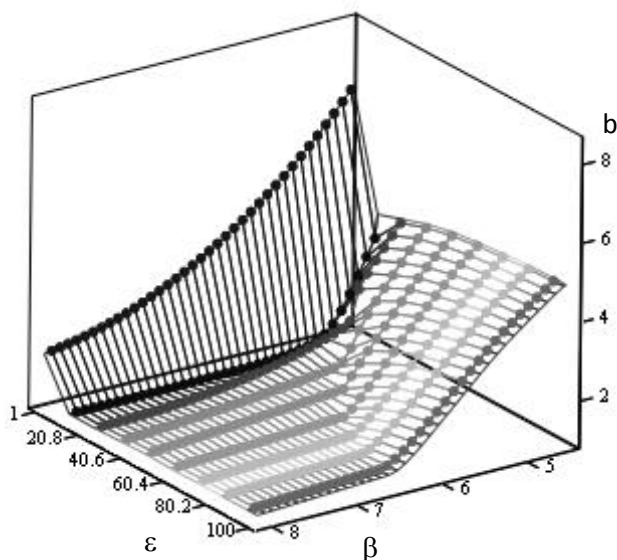


Рис. Фазовая диаграмма реализации 2D- бифуркаций (область над поверхностью графика) в зависимости от параметров управления  $\epsilon$ ,  $\beta$ ,  $b$ .

### Литература

1. В.Д. Кревчик, М.Б. Семенов, К. Ямамото и др. Управляемое диссипативное туннелирование (коллективная монография, посвященная памяти академика РАН А.И. Ларкина, под редакцией Нобелевского лауреата Э. Леггетта, при редакционном участии В.Д. Кревчика, М.Б. Семенова, К. Ямамото и др.), Часть 1, 2. Издательство физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009.
2. В.Ч. Жуковский, О.Н. Горшков, В.Д. Кревчик, М.Б. Семенов, Е.В. Грозная, Д.О. Филатов, Д.А. Антонов Управляемое диссипативное туннелирование во внешнем электрическом поле// Вестник МГУ. Сер. 3 (Физика. Астрономия). – 2009. вып. 1.
3. Yu.I. Dahnovsky, V.D. Krevchik, A.A. Ovchinnikov, M.B. Semenov, K. Yamamoto// Physical Review B, vol. 68, 2003, P. 155426;

**Электростатическая неустойчивость Рэлея  
заряженной проводящей капли эллипсоидальной формы**  
*Русакова Наталья Егоровна*

*ассистент*

**Самухина Юлия Владимировна**

*Студентка*

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,*

*физический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: juliesam2008@mail.ru*

Неустойчивость заряженных капель, открытая еще в 1882 году Рэлеем [1], до настоящего времени активно исследовалась как теоретически, так и экспериментально.

Прежде всего, это обусловлено заманчивой перспективой использования этого явления в различных физических приложениях [2]: для получения капель малого размера, управления кластерами коллоидных частиц в растворах, для струйной печати, а также капельная модель активно используется для описания ядер атомов.

Несмотря на то, что это явление исследуется уже в течение довольно продолжительного периода времени, многие вопросы, связанные с этой неустойчивостью, до настоящего времени остаются неясны. В данном сообщении показано, что вопреки утверждению, высказанному в ряде работ [3-5], при достижении критерия Рэлея неустойчивость осесимметричной эллипсоидальной капли может развиваться не вдоль главных осей эллипсоида, а по иному пути. Этот результат вытекает из анализа точного аналитического выражения для плотности суммарной поверхностной пондеромоторной силы. Для случая осесимметричного эллипсоида выражение для поверхностной плотности пондеромоторной силы может быть представлено в аналитической форме. Благодаря этому, можно показать, что в диапазоне параметров Рэлея  $3.5 < W < 3.9$  плотность пондеромоторной силы достигает максимального значения не в направлении главных осей эллипсоида. В частности при  $W = 3.7$  плотность пондеромоторной силы будет максимальной при значении полярного угла, приблизительно равного  $30^\circ$ . Следовательно, в этом направлении будет возникать неустойчивость заряженной капли эллипсоидальной формы.

### Литература

1. Lord Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. Ser. 5 1882, Vol. 14 p.184-186.
2. D. Duft, H. Lebius et al. Shape Oscillations and Stability of Charged Microdroplets // Phys.Rev.Lett. 2002. Vol. 89. N-8, p.1-4
3. Щукин С.И., Григорьев А.И. Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трёхосного эллипсоида // ЖТФ 1998, Т68, вып.11, с.48-51.

4. Шукин С.И., Григорьев А.И. Энергетический анализ возможных каналов распада заряженной капли на две части // ЖТФ 2000, Т70, вып.4, с.1-7.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей //Изв. РАН. МЖГ. 1994. №3. с.3-22.

**О некоторых приложениях метода обобщенных подстановок Коула-Хопфа к задачам газо-гидродинамики**

*Зиновьев Д.А.<sup>1</sup>, Журавлев В.М.*

<sup>1</sup>*аспирант*

*Ульяновский государственный университет, Инженерно-физический факультет высоких технологий, г. Ульяновск, Российская Федерация*

*e-mail: [zinnovjev\\_d@mail.ru](mailto:zinnovjev_d@mail.ru), [zhvictorm@mail.ru](mailto:zhvictorm@mail.ru)*

К настоящему времени известно сравнительно небольшое количество точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса [1,2] для течений сжимаемой жидкости в двумерном и трехмерном случае, которые могут служить базой для решения конкретных прикладных задач. Поэтому в настоящее время при решении большинства прикладных задач приоритет отдается численным моделям динамики жидкости. Однако такой подход не позволяет решить целый ряд фундаментальных задач в этой области. Поэтому поиски методов построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса остаются одним из активных направлений исследования в математической физике и гидромеханике см., например, [3] и библиографию там. Обычно точные решения строятся на основе параметризации некоторого класса течений, исходя из каких-либо симметричных условий или аналитических свойств функций, входящих в параметризацию. Такой подход особенно эффективен в случае двумерных течений несжимаемой жидкости, для которых можно ввести функцию тока [1,2] и использовать в явном виде дифференциальные законы сохранения см. например, [7]. В трехмерном случае методы параметризации иные, но по сути сводятся к аналогичным методам [3,4]. Достаточно универсальные методы для сжимаемой жидкости отсутствуют в настоящее время.

Для одномерных вязких течений классическим результатом является подстановка Коула-Хопфа, позволяющая свести уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности [5]. Обобщение этого подхода было использовано в работах [8,9,10] для построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса сжимаемой жидкости для одномерных течений. А в работе [11] в частном случае квазипотенциальных течений аналогичный результат был получен для двумерных течений идеальной жидкости. Эти результаты для одномерных течений интерпретируются с несколько иных позиций в данной работе, что позволяет получить еще более обобщенный результат, чем в [9,10]. Как оказалось, новый способ параметризации одномерных течений может быть перенесен и на многомерный случай. В работе на основе такого подхода получены общие представления для трехмерных течений сжимаемой идеальной и вязкой жидкости, которые связываются некоторым функциональным преобразованием с другим набором уравнений, вид которых зависит от произвольных функций. Такое преобразование фактически является преобразованием Бэклунда. Выбор произвольных функций позволяет строить новые классы точных решений уравнений динамики жидкости.

Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа (МОПКХ) [8,9,10] базируется на следующих общих соотношениях. Рассматривая пару дифференциальных соотношений:

$$T_t + V(x,t)T_x = 0, \quad T_{xx} + U(x,t)T_x = 0, \quad (1)$$

можно показать прямыми вычислениями [8,9,10], что вся совокупность их дифференциальных следствий оказывается замкнутой, если функции  $V(x,t)$  и  $U(x,t)$  связаны одним уравнением:

$$U_t = \frac{\partial}{\partial x}(V_x - UV). \quad (2)$$

Это означает, что любая производная функции  $T$  может быть представлена в следующем виде:

$$T^{[k,n]} = \frac{\partial^{k+n} T}{\partial x^k \partial t^n} = A^{(k,n)}[U,V]T_x, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $A^{(k,n)}[U,V]$  - дифференциальные полиномы только и только функций  $U$  и  $V$ . Эти полиномы вычисляются рекуррентно из (2) по следующей схеме:

$$\begin{aligned} A^{(k+1,n)}[U,V] &= \frac{\partial}{\partial x} A^{(k,n)}[U,V] - U A^{(k,n)}[U,V], \\ A^{(k,n+1)}[U,V] &= \frac{\partial}{\partial t} A^{(k,n)}[U,V] - Q A^{(k,n)}[U,V], \\ A^{(0,1)}[U,V] &= V, \quad A^{(1,0)}[U,V] = 1, \quad A^{(2,0)}[U,V] = U, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Q = V_x - UV$ . В этой схеме наиболее важным является то обстоятельство, что соотношения (2) и (3) выполняются при любой функции  $T$ . Пусть функции  $T$  выбираются из множества решений некоторого интегрируемого нелинейного уравнения в частных производных, например, линейного уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^L C_{k,n} T^{[k,n]} + C_{01} T_t + C_{1,0} T_x = 0. \quad (4)$$

Тогда с помощью соотношений (3) интегрируемое уравнение для  $T$  преобразуется к нелинейному уравнению для функций  $U$  и  $V$ :

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^L C_{k,n} A^{(k,n)}[U,V] - C_{01} V + C_{1,0} = 0. \quad (5)$$

Поэтому соотношения (1) можно рассматривать как обобщенные подстановки Коула-Хопфа, линеаризующие (5) к уравнению (4). В частном случае, когда функция  $T$  удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$T_t = \nu T_{xx},$$

функция  $U$  удовлетворяет уравнению Бюргера

$$U_t = \nu U_{xx} - 2\nu U U_x.$$

В этом случае соотношения (1) эквивалентны классической подстановке Коула-Хопфа [5,6], что оправдывает общее название данного подхода.

Данный метод обобщается на более широкий класс уравнений, в частности, на многомерные матричные уравнения в частных производных, а так же уравнения, в которых частные производные заменены на другие типы операций [10,11].

В работе построено общее представление решений уравнений одномерных течений вязкой сжимаемой жидкости, с помощью которого можно находить точные решения. Найдено общее представление решений уравнений Эйлера трехмерных течений сжимаемой жидкости. По аналогии найдено представление для течений в равномерно-вращающейся системе отсчета. Данный подход распространен на случай трехмерных вязких течений сжимаемой жидкости с определенного вида объемными силами

#### Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1950
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Наука, 1963
3. Полянин А.Д., Аристов С.Н., ДАН, **420**:2, 180-185
4. Броман Г.И. , Руденко О.В. , УФН, **180**:1 2010, 97-104
5. J.M.Burgers. The nonlinear diffusion equation. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974
6. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1978
7. Журавлев В.М., ПММ, **58**:6 1994, 60-67
8. Журавлев В.М., Никитин А.В., Нелинейный мир, **5**, N 9, 603-611 2007
9. Журавлев В.М., Зиновьев Д.А., Письма в ЖЭТФ, **87**, N 5, 314-319 2008
10. Журавлев В.М., ТМФ, **158**:1 2009, 58-71
11. Журавлев В.М., Зиновьев Д.А., Письма в ЖЭТФ, **88**:3 2008, 194

**Космологические сигма-модели и темная энергия**

*Аббязов Р.Р.*

*аспирант*

*Ульяновский государственный педагогический университет, Ульяновск, Россия*

*E-mail: renren2007@yandex.ru*

Интерес к космологическим моделям с несколькими скалярными полями, а также к сигма-моделям, происходит от стремления понять природу темной материи и темной энергии. После обнаружения ускоренного расширения Вселенной в настоящую эпоху были предприняты попытки описания темной энергии, были выдвинуты модели с квинтэссенцией, фантомными полями, однако они не дали окончательного ответа на вопрос о природе темной энергии. По этой причине в настоящей работе используются два скалярных поля нелинейной сигма-модели. Отправной точкой в наших исследованиях является монография [1], в которой представлены аналитические методы решения уравнений, и работа [2], в которой была предложена двухкомпонентная космологическая модель с пространственно-плоской метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ), включающая материю в пылевидном состоянии и темную энергию в виде скалярного поля. Работа [2] представляла для нас особый интерес потому, что в ней с помощью численных методов проинтегрированы уравнения модели в предположении, что на ранних стадиях эволюции Вселенная была материально-доминированной.

В настоящей работе проводится анализ модели, состоящей из двух полей нелинейной сигма-модели и материи, включающей в себя барионную и темную материю. Уравнения модели решаются численными методами, делается вывод о характере расширения и составе Вселенной, описываемой такой моделью.

**Литература**

- [1] Червон С.В. (1997) Нелинейные модели в теории гравитации и космологии // Ульяновск, УлГУ.
- [2] Sanil Unnikrishnan and H. K. Jassal and T. R. Seshadri (2008) Scalar Field Dark Energy Perturbations and their Scale Dependence // arXiv:0801.2017v3.
- [3] Edmund J. Copeland, M.Sami, Shinji Tsujikawa (2006) Dynamics of dark energy // arXiv:hep-th/0603057.