Секция «Математика и механика»

Метод нелинейных интегральных уравнений для решения статической контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности

Грабко Елена Валерьевна
Аспирант
Запорожский национальный университет, математический, Запорожье, Украина
E-mail: elenagrabko@rambler.ru

Рассмотрим статическую пространственную контактную задачу о взаимодействии двух упругих тел при отсутствии трения между ними и неизвестной заранее поверхности контакта. Взаимодействующие тела имеют шероховатые поверхности и могут быть аппроксимированы упругими полупространствами. Задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$p\,(s) = h\,(p\,(s) - E\,(f\,(p\,(s)) + A\,(p)\,(s) - g\,(s)))\;;\quad s \in \Omega\,, \tag{1}$$

в котором неизвестная функция $p\,(s) \in L_2\,(\Omega)$ [2] и представляет собой распределение контактных давлений в заданной плоской ограниченной области Ω, содержащей в себе неизвестную площадку контакта и расположенной в общей для тел касательной плоскости G, проходящей через точку их начального касания; $E > 0$ - произвольная постоянная; $A : L_2\,(\Omega) \to L_2\,(\Omega)$ - линейный ограниченный интегральный оператор влияния; $h\,(x) = \frac{1}{2}\,(x + |x|)\,,\; x \in R$ и $g\,(s) = -\delta_0\,(s) + \Delta,\; s \in \Omega$. Здесь $\delta_0\,(s) \geq 0$ - зазор между телами в момент их начального касания, измеренный в направлении нормали к плоскости G; $\Delta > 0$ - сближение тел. Выражение $f\,(p\,(s))$ задает смятие поверхностных слоев тел и учитывает деформации микронеровностей, образующих шероховатость. Функция $f\,(x)$ в является непрерывной, строго возрастающей, нечетной и неограниченной на всей действительной числовой прямой.

Получение точного или приближенного решения интегрального уравнения (1) аналитическими методами сопряжено со значительными трудностями, главная из которых заключается в том, что плоская поверхность контакта тел является заранее неизвестной и может иметь очень сложную конфигурацию. Поэтому для решения данного уравнения целесообразно использовать численные методы, основанные на его дискретизации.

Заменим $A : L_2\,(\Omega) \to L_2\,(\Omega)$ на аппроксимирующий оператор $A_n : L_2\,(\Omega) \to L_2\,(\Omega)$, а $g\,(s) \in L_2\,(\Omega)$ на аппроксимирующий элемент $g_n\,(s) \in L_2\,(\Omega)$, получим уравнение $p\,(s) = h\,(p\,(s) - E\,(f\,(p\,(s)) + A_n\,(p)\,(s) - g_n\,(s)))\;,\quad s \in \Omega\,$, которое сводится к системе n^2 скалярных уравнений с n^2 неизвестными. Такую систему можно решить методом простой итерации, где параметр E, влияющий на сходимость процесса, выбирается экспериментально.

С целью апробации предложенного алгоритма было получено численное решение контактной задачи о вдавливании гладкого параболического штампа в упругое полупространство, имеющее шероховатую поверхность. Полученные результаты сравнивались с результатами работы [1]. Относительная погрешность в определении радиуса контактного пятна составляет примерно 2.5%, в определении давления на пятне контакта - 7%.

Литература

1. Александров В.М., Пожарский Д.А. Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // ПММ. - 2004. - Т. 68. - Вып. 3. - С. 516-527.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. - 752 с.