Секция «Математика и механика»

О минимальных схемах для линейных булевых функций

Комбаров Юрий Анатольевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: yuri.kombarov@gmail.com

Наиболее изученными булевыми функциями с точки зрения их реализации схемами [2] являются линейные функции, представляемые в виде$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n$, где $c_i = 0, 1 (i = 0, \ldots, n)$, а "$\oplus$"означает сложение по модулю два [7]. Первый далеко не тривиальный результат был установлен еще в 1952 г. Кадро [8]: для реализации линейной булевой функции (существенно зависящей) от n переменных контактной схемой необходимо и достаточно $4n - 4$ контактов. Дальнейшие исследования касались сложности реализации линейных функций схемами из функциональных элементов в различных функционально полных базисах. Под *сложностью реализации* $L(f)$ булевой функции f в том или ином базисе, как правило, подразумевалось наименьшее возможное число функциональных элементов, достаточное для реализации функции f схемой в заданном базисе. В работах [3,4,5,6] устанавливается сложность реализации линейных функций в различных базисах, но не затрагивается вопрос об устройстве, структуре соответствующих минимальных схем. В статье [1] для любого $c \in \{0, 1\}$ доказано, что $L(c \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 3n - 3$ в базисе $x \rightarrow y, \overline{x} \wedge y\}$ и, кроме того, устанавливается определенная блочная структура минимальных схем. Настоящая работа посвящена исследованию структуры минимальных схем для линейных функций в базисе $\{x \wedge y, x \vee y, \overline{x}\}$.

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов в базисе Б $= \{x \wedge y, x \vee y, \overline{x}\}$. Для схемы S через $L(S)$ обозначим число функциональных элементов в S; число $L(S)$ будем считать *сложностью схемы* S. Для произвольной булевой функции f положим $L(f) = \min L(S)$, где минимум берется по всем схемам (в рассматриваемом базисе), реализующим f. Если схема S реализует функцию f и $L(S) = L(f)$, то эту схему будем считать *минимальной* (для рассматриваемой функции f). Схему, изображенную на рис. 1а, назовем *стандартным блоком 1-го типа*, а схему, изображенную на рис. 1б, — *стандартным блоком 2-го типа*. Будем говорить, что стандартный блок B (1-го или 2-го типа) *входит в схему* S *правильно*, если выход элемента E_1 (блока B) соединен в схеме S только со входом элемента E_3 (этого блока), а выходы элементов E_2 и E_3 соединены только со входами элемента E_4. В работе доказывается следующая

Теорема 1. Любая минимальная схема S в базисе Б $= \{x \wedge y, x \vee y, \overline{x}\}$, реализующая линейную булеву функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus c$, где $n \geq 2$, а $c \in \{0, 1\}$, разбивается на $n - 1$ непересекающихся стандартных блоков, каждый из которых входит в S правильно.

Литература

1. Комбаров Ю.А. О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \overline{x} \& y\}$// Труды VIII Международной конференции„Дискретные модели в теории управляющих систем“ (Москва, 6–9 апреля 2009 г.) М.: МАКС Пресс, 2009, 145–149.

2. Лупанов О.Б. Асимтотические оценки сложности управляемых систем. М.: МГУ, 1984.

3. Редькин Н.П. Доказательство минимальности некоторых схем изфункциональных элементов//Проблемы кибернетики. 1970. 23, 83–101.

4. Редькин Н.П. О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов// Кибернетика. 1971. 6, 31–38.

5. Редькин Н.П. О минимальных и асимптотически минимальных схемах для некоторых индивидуальных булевых функций // Материалы IX Международного семинара „Дискретная математика и ее приложения“, посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. 11–19.

6. Шкребела И.С. О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \to y, \overline{x}\}$// Дискретная математика. 2003. 15, 100–112.

7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

8. Cardot C. Quelques rezultats sur l'application de l'algebre de Boole a la synthese des circuits a relais // Ann. Telecomm. 1952. 7, № 2. 75–84.

Слова благодарности

Приношу глубокую благодарность профессору Н.П.Редькину, под руководством которого была выполнена эта работа.

Иллюстрации

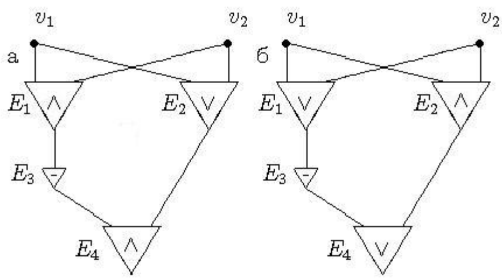

Рис. 1: рис. 1а и 1б