Секция «Математика и механика»

Бифуркационные множества в задаче Ковалевской-Яхьи.

Андреянов Павел Павлович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: andreyanov.pp@gmail.com

В работе изучается задача о движении тяжёлого гиростата, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а гиростатический момент $\vec{\lambda} = (0, 0, \lambda)$ постоянен и направлен вдоль оси динамической симметрии. Этой задаче соответствует динамическая система с гамильтонианом H и первыми интегралами G, Γ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^6(\omega, \nu)$:

$$H = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\omega, \omega\rangle + \nu \times \vec{a}, \quad G = \langle \mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}, \nu\rangle, \quad \Gamma = \langle \nu, \nu\rangle,$$

где через $\langle , \rangle$ обозначено стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^3$. В работах [4], [5] Х. М. Яхьи был указан дополнительный интеграл K четвертой степени. При помощи замены переменных переходим к новым первым интегралам и новому параметру системы: $\tilde{H} = \gamma^{-1} \cdot H$, $\tilde{K} = \gamma^{-2} \cdot K$, $\tilde{G} = (2A\gamma)^{-1/2} \cdot G$, $\tilde{\lambda} = (A\gamma/2)^{-1/2} \cdot \lambda$ в конфигурационном пространсте $\mathbb{R}^6(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$.

Рассмотрим четырехмерную совместную поверхность уровня интегралов $\tilde{G}, \Gamma$:

$$M^4_{g,\mu} = \{(\omega, \nu) \mid \tilde{G} = g,\ \Gamma = 1\}, \qquad \mu = \tilde{\lambda}/\sqrt{2}.$$

На ней система становится вполне интегрируемой и имеет два непрерывных параметра: g - постоянную площадей и μ - гиростатический момент.

В случае $\mu = 0$ получается интегрируемая система, известная как "случай Ковалевской". Топология соответствующего слоения Лиувилля была полностью исследована в работе [3] А. В. Болсинова, П. Рихтера и А. Т. Фоменко. В случае $g = 0$ получается другая известная система, топология которой была полностью исследована в работе [2] П.В.Морозова. Выяснилось, что некоторые важные топологические свойства системы, обнаруженные в граничных случаях, продолжаются на системы с параметрами $(g, \mu) \in U$, в то же время в них присутствуют принципиально новые эффекты, а топологические инварианты устроены гораздо сложнее.

Рассмотрим точку (g, μ) в области U, и отображение момента $\tilde{K} \times \tilde{H}$, где

$$U = \{(g, \mu) \mid g > 0,\ \mu > 0\}, \qquad \tilde{K} \times \tilde{H} : M^4_{g,\mu} \to \mathbb{R}^2(k, h).$$

Множество его критических значений $\Sigma_{g,\mu}$ (далее просто Σ) называется бифуркационной диаграммой. В работе [1] П.Е.Рябова было доказано, что множество Σ принадлежит дискриминантному множеству $D_{g,\mu}$ (далее просто D), которое задается объединением двух алгебраических кривых γ_1, γ_2, и показано, какую часть D необходимо отбросить, чтобы получить Σ. Оказывается, что точки (g, μ), в которых происходят бифуркации диаграмм D и Σ, образуют одно и то же множество Θ в области U. В работе [1] было показано, что это множество состоит из кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$, делящих область U на 18 камер, и было дано описание диаграмм D и Σ для точек (g, μ) внутри этих камер.

Бифуркационные диаграммы Σ в задаче Ковалевской-Яхьи и их перестройки представляют большой интерес для исследования топологии слоения Лиувилля. Цель настоящей работы - провести более подробный анализ бифуркационных множеств Σ и Θ, и дать описание перестроек, происходящих с Σ, когда точка (g, μ) на плоскости параметров проходит через Θ.

Работать с множеством D, проще, чем с множеством Σ, так как оно состоит из алгебраических кривых. Кривые γ_1, γ_2 непрерывно деформируются при изменении параметров g, μ, поэтому можно считать, что качественный вид диаграммы D задается набором её особых точек и их расположением относительно дуг этих кривых. Особые точки диаграммы D это, по определению, точки возврата кривых γ_1, γ_2, а также точки пересечения или касания кривых γ_1, γ_2 друг с другом (самопересечения в нашем случае отсутствуют). Имея параметрическую и неявную записи кривых γ_1, γ_2, мы получаем формулы для многочленов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, действительными корнями которых являются те значения параметров на кривых γ_1, γ_2, которым соответствуют особые точки. Эти многочлены разлагаются на множители, которым соответствуют точки разного типа (точки возврата, пересечения или касания).

Множество Θ бифуркационых значений параметров определим как те $(g, \mu) \in U$, при которых происходят бифуркации множества особых точек диаграмм D. При помощи многочленов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ мы вычисляем формулу для многочлена $L(g, \mu)$, линией нулевого уровня которого является Θ. Область U разбивается на 18 камер, а диаграммы D, соответствующие точкам $(g, \mu) \in U \setminus \Theta$, разбиваются на 18 классов эквивалентности.

Благодаря удачной нормировке параметров системы, множество Θ оказывается симметричным относительно оси $g = \mu$. Более того, этот факт является следствием более глубокой симметрии семейства диаграмм D. Существует гомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, переводящий $D_{g,\mu}$ в $D_{\mu,g}$, поэтому существенно различных классов диаграмм D получается не 18, а только 10. Однако, эта симметрия пропадает, если перейти к диаграммам Σ.

Главные результаты настоящей работы сформулированы в Теоремах 1, 3, 4, 5.

В Теореме 1 вычисляется многочлен $L(g, \mu)$, линией нулевого уровня которого является множество Θ.

В Теоремах 3, 4 описываются бифуркации, происходящие с D, когда точка (g, μ) трансверсально пересекает одну из дуг множества Θ. В Теореме 3 показано, особые точки какого типа (точки возврата, пересечения или касания) участвуют в каждой из бифуркаций, а в Теореме 4 эта информация дополняется поведением дуг диаграмм D, примыкающим к этим особым точкам.

В Теореме 5 описано поведение кривых γ_1, γ_2, когда точка (g, μ) приближается к одной из осей $g = 0$, $\mu = 0$. Показано, что дискриминантное множество, соответствующее граничному случаю, является поточечным пределом дискриминантных множеств D, когда соответствующий параметр стремится к нулю.

Таким образом, в работе описаны все бифуркации диаграмм D (а значит и Σ), при переходе точки (g, μ) между камерами $U \backslash \Theta$, а также при переходе к граничным случаям $g = 0$ и $\mu = 0$. Из этого можно сделать вывод о том, какие части диаграмм при $(g, \mu) \in U$, можно отождествить с частями диаграмм в уже исследованных частных случаях

$g = 0$ и $\mu = 0$. В частности, некоторые элементы диаграмм при $(g, \mu) \in U$, являются новыми и не продолжаются с граничных случаев $g = 0$ и $\mu = 0$.

Литература

1. Рябов П.Е. Бифуркационное множество задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи. Дисс. Волгоград 1997.

2. Морозов П.В. Лиувиллева классификация некоторых интегрируемых систем механики твердого тела Москва - 2006.

3. Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской - Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42.

4. Yehia H.M. New integrable cases in dynamics of rigid bodies. - Mech. Res. Com., 1986, Vol. 13(3), pp.169-172.

5. Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата. Вестник МГУ сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88-90

6. Ошемков А.А. Труды Семинара по векторному и тензорному анализу вып. 25 часть 2. Издательство Московского Ун-та, 1993.

7. Харламов М.П., Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи. - Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т.2, №2.