Секция «Математика и механика»

Автоматная сложность классов Поста.

Кибкало Мария Александровна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Химический факультет, Москва, Россия
E-mail: mkibkalo@gmail.com

Определение сложности представления языков различными структурами - одна из традиционных задач теории автоматов. В случае представимости конечными автоматами под сложностью языка понимается число состояний в представляющем его приведенном автомате. В работе [1] решена задача о нахождении точного значения максимальной сложности конечных языков в произвольном конечном алфавите в зависимости от максимальной длины слова в нем.

Предположение о том, что в некоторых классах конечных языков достижимы иные, более низкие оценки сложности, нашло подтверждение при рассмотрении классов языков, определяемых булевыми функциями. Было установлено, что булевы языки, соответствующие замкнутым классам Поста, разбиваются на три типа в соответствие с асимптотикой функции Шеннона, причем для некоторых классов устанавливается точное значение функции Шеннона.

В произвольном конечном алфавите А определим класс конечных языков, содержащих слова равной длины. Каждой булевой функции можно взаимно однозначно сопоставить конечный язык из этого класса по следующему правилу: слово лежит в языке тогда и только тогда, когда на соответствующем наборе функция принимает значение 1.

Введем согласно [2] понятия инициального конечного автомата (ИКА) и представимости конечного языка в ИКА. Будем говорить, что ИКА представляет булеву функцию, если он представляет конечный язык, сопоставленный ей по правилу, определенному выше. Автоматной сложностью булевой функции назовем наименьшую сложность ИКА (по числу состояний), представляющего этот язык. Сложностью класса булевых функций (функцией Шеннона класса) назовем максимальную сложность функции из этого класса.

Для получения оценок функции Шеннона использовались результаты, изложенные в [3]-[6]. Далее будем пользоваться нотацией классов Поста, введенной в [7].

Теорема 1. Имеют место следующие оценки функции Шеннона классов Поста:

1. Пусть K - один из классов $C_i, i = 1, 2, 3, 4,\ D_1,\ D_3,\ F_i^{\infty}(n),\ F_i^{\mu}(n), i = 1, 4, 5, 8, \mu > 1, \mu \in \mathbb{N}$. Тогда: $S(\mathcal{K}, n) \asymp \frac{2^n}{n}$

2. Пусть K - один из классов $A_i, i = 1, 2, 3, 4,\ D_2,\ F_i^{\infty}(n),\ F_i^{\mu}(n), i = 2, 3, 6, 7, \mu > 1, \mu \in \mathbb{N}$. Тогда: $S(\mathcal{K}, n) \asymp \frac{2^n}{n \cdot \sqrt{\log n}}$

3. Пусть K - один из классов $L_i, i = 1, 2, 3, 4, 5,\ S_i, i = 1, 3, 5, 6,\ P_i, i = 1, 3, 5, 6,\ O_i, i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Тогда: $S(\mathcal{K}, n) \asymp n$

4. $S(O_3, n) = 1$

Ниже даны точные значения функции Шеннона для классов из пп. 1, 3 Теоремы 1.

Теорема 2. Если K - один из классов $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ и $n \in N$, то $\exists p > 0 : S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1$

Теорема 3. Если K - один из классов $D_1, D_3, n \in N, \text{и} p = \mathcal{A}(n), \text{то} :$

1. При $n = p + 2^p : S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1 - 2^{2^{p-1}-1}$
2. При всех остальных значениях $n : S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1$

Теорема 4. Если K - один из классов $F_i^{\infty}(n), i = 1, 4, 5, 8, n \in N, \text{и} p = \mathcal{A}(n-1) : S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-1-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1 + max(2^{n-2-p}, 2^{2^p} - 1)$

Теорема 5. Для следующих классов точные значения функции Шеннона равны:

1. $S(L_i, n) = 2n, i = 1, 2, 3, 4, 5$
2. $S(S_i, n) = 2n, i = 1, 3, 5, 6$
3. $S(P_i, n) = n + 1, i = 1, 3, 5, 6$
4. $S(O_i, n) = n + 1, i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
5. $S(O_3, n) = 1$

Литература

1. Кибкало М.А. О сложности представления коллекции языков в конечных автоматах, Интеллектуальные системы. 2010. Вып. 13.
2. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, Москва, 1985.
3. Кузьмин А.Д. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга. В сб.: Проблемы кибернетики, Вып. 13, Москва, Наука, 1955, 75–96 (РЖМат, 1966, 1В223)
4. Коршунов А.Д. О числе монотонных функций, Проблемы кибернетики. 1981. Вып. 38. С. 5–109
5. Сапоженко А.А. О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах, Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 1. С. 74–93
6. Сапоженко А.А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах, Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128
7. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. Наука, Москва, 1966.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность академику Кудрявцеву В.Б. и проф. Бабину Д.Н. за ценные замечания и внимание к работе.