Секция «Математика и механика»

Уравнение Гинзбурга-Ландау со сносом.

Чугреева Ольга Андреевна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: tchao@mail.ru

В работе рассматривается уравнение Гинзбурга-Ландау вида

$$(\alpha_\varepsilon + i)\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) + F_\varepsilon(t) \cdot \nabla u_\varepsilon$$

в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с C^1-гладкой границей с начальными условиями

$$u_\varepsilon(.\,,0) = u_\varepsilon^0(.\,)$$

и условиями Дирихле на границе области

$$u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = g$$

где $g \in C^1(\partial\Omega, S^1)$ и $F_\varepsilon(t) = (F_\varepsilon^1(t), F_\varepsilon^2(t))$ - вектор-функция, каждая компонента которой ограничена. Коэффициенты удовлетворяют условиям $F_\varepsilon(t) \cdot |\log\varepsilon| \to F_0(t)$, $\alpha_\varepsilon \cdot |\log\varepsilon| \to \alpha_0$, при $\varepsilon \to 0$, $\alpha_0 > 0$, а $F_0(t)$ - также ограниченная вектор-функция.

Доказана теорема, аналогичная основному результату работы Курцке и др. [1] о том, что, имея в начальный момент времени начальные условия, соответствующие конечному количеству особых точек $\{a_i^0\}$ функции u_ε, можно вывести систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую закон их движения:

$$\begin{cases} \dot{a}_i \begin{pmatrix} \alpha_0 & -d_i \\ d_i & \alpha_0 \end{pmatrix} = -(\frac{1}{\pi}\frac{\partial W}{\partial a_i} + F_0) \\ a_i(0) = a_i^0 \end{cases}$$

В доказательстве существенно используются результаты работ Сандриера и Серфати [2,3], позволяющие должным образом описать динамику функционала энегрии

$$E_\varepsilon(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}(1 - |u|^2)^2,$$

определяющего поведение системы.

Литература

1. M.Kurzke, C. Melcher, R.Moser, D.Spirn Dynamics for Ginzburg-Landau Vortices under a Mixed Flow, Indiana Univ. Math. Journal 58(2009) no. 6, 2597-2621
2. E. Sandier and S.Serfaty, Gamma convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau, Comm.Pure Appl. Math. 57 (2004), 1627-1672
3. E. Sandier and S.Serfaty , A product estimate for Ginzburg-Landau and corollaries, J.Funct.Anal. 211 (2004), 219-244