

Секция «Математика и механика»

Обобщённые ассоциаэдры, нестоэдры и гипотеза Гала

Горский Михаил Александрович

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: mike.gorsky@gmail.com

В теории кластерных алгебр определяются ([3]) обобщённые ассоциаэдры - простые флаговые многогранники, двойственные к кластерным комплексам алгебр конечного типа. Каждый такой многогранник канонически соответствует несвязному объединению диаграмм Дынкина. Диаграммам  $A_n$  соответствуют обычные ассоциаэдры  $As^n$ ; диаграммам  $B_n$  и  $C_n$  - циклоэдры  $Cy^n$ .

Для каждого  $n$ -мерного многогранника  $P$  рассматриваются  $f$ -полином  $f(P)(t) = \sum_{i=0}^n f_i t^i$ , где  $f_i$  - число граней  $P$  размерности  $i$ , и  $h$ -полином  $h(P)(t) = f(P)(t - 1)$ . Для простых многогранников выполнены соотношения Дэна-Соммервиля, равносильные возвратности  $h$ -полинома, поэтому  $h(P)(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_i t^i (1+t)^{n-2i}$ . Полином  $\gamma(P)(\tau) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_i \tau^i$  называется  $\gamma$ -полиномом.

В работе [4] была сформулирована известная гипотеза:

**Гипотеза Гала.** Пусть многогранник  $P$  простой и флаговый, тогда  $\gamma_i(P) \geq 0$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{P}^{cube}$  многогранников, получающихся из куба последовательными срезками граней коразмерности 2. В работе [2] гипотеза Гала была доказана для всех многогранников из  $\mathcal{P}^{cube}$ , включая все флаговые нестоэдры. Доклад будет посвящён следующим результатам работы [1]:

**Теорема 1.** Обобщённые ассоциаэдры, соответствующие диаграммам Дынкина  $D_n$ , не являются нестоэдрами (при  $n \geq 4$ ).

**Теорема 2.** Обобщённые ассоциаэдры серий  $ABCD$  лежат в  $\mathcal{P}^{cube}$ .

**Следствие 1.** Для обобщённых ассоциаэдров серий  $ABCD$  верна гипотеза Гала.

Теорема 1 даёт новый интересный пример серии простых флаговых многогранников, возникающих естественным образом, но не являющихся нестоэдрами. Теорема 2 была частично доказана в [2], однако наше доказательство иное и работает для всех 4 серий. Помимо следствия 1, оно даёт также новые, свободные от вычитаний, рекуррентные соотношения на  $h$ - и  $\gamma$ -полиномы обобщённых ассоциаэдров серии  $D$ .

Литература

1. М. А. Горский, “Доказательство гипотезы Гала для обобщенных ассоциаэдров серии  $D$ ”, УМН, 65:6(396) (2010), 185–186
2. В. Д. Володин. Кубические реализации флаговых нестоэдров и доказательство гипотезы Гала для них. УМН, 65:1(391) (2010), 183–184.
3. S. Fomin and A. Zelevinsky. Y-systems and generalized associahedra. Annals of Math. 158 (2003), no. 3, 977-1018, arXiv:hep-th/0111053.
4. S. R. Gal. Real root conjecture for five- an higher-dimensional spheres. Discrete Comput. Geom., 34:2 (2005), 269–284, arXiv:math/0501046.