Секция «Математика и механика»

О времени конструирования изображений клеточными автоматами.

Титова Елена Евгеньевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: lenbka@mail.ru

В работе рассматривается задача конструирования изображений клеточными автоматами на прямоугольном экране. В каждую клетку прямоугольного экрана $n \times m$ помещено по одному экземпляру одного и того же автомата $\mathcal{A}$ (клеточного), к его входам присоединены выходы автоматов, стоящих в соседних клетках, выход автомата — его текущее состояние. Доопределим нулями крайние входы автоматов n-й строки и m-го столбца. Неопределенные входы автоматов первой строки и первого столбца будем называть свободными входами, а всю эту конструкцию — (n, m)-экраном $S =< \mathcal{A}, n, m >$. Также имеется внешний автономный автомат $\mathcal{A}_e$ с $(n + m)$ выходами, который генерирует входные последовательности для свободных входов клеточных автоматов. Пара $G =< \mathcal{A}_e, S >$, состоящая из экрана и внешнего автомата называется генератором. Задача состоит в построении такого генератора $G =< \mathcal{A}_e, S >$, чтобы через некоторое время $T(\mathcal{A}_e, S)$ после начала работы внешнего автомата на экране появилась любая заранее заданная конфигурация из нулей и единиц, которая при подаче нулей на свободные входы остается неизменной сколь угодно долго (изображение). Тогда экран S — универсальный, $\mathcal{U}(n, m)$ — множество всех универсальных (n, m)-экранов. Через $\mathcal{G}(S, \Im)$ обозначим множество генераторов $< \mathcal{A}_e, S >$, формирующих изображение $\Im$, $\Im(n, m)$ — множество всех изображений размера $n \times m$. Если $S =< \mathcal{A}, n, m >$ — экран, то $Q(S)$ — число состояний клеточного автомата $\mathcal{A}$, $Q(n, m) = \min_{S \in \mathcal{U}(n,m)} Q(S)$. Обозначим $T(S, \Im) = \min_{<\mathcal{A}_e, S> \in \mathcal{G}(S,\Im)} T(\mathcal{A}_e, S)$, $T(S, n, m) = \max_{\Im \in \Im(n,m)} T(S, \Im)$, $T(n, m) = \min_{S \in \mathcal{U}(n,m)} T(S, n, m)$, $T(n, m, q) = \min_{S \in \mathcal{U}(n,m), Q(S) \le q} T(S, n, m)$.

Показано, что для любого изображения необходимо и достаточно, чтобы клеточный автомат имел 3 состояния. Получены оценки времени конструирования изображений в зависимости от числа состояний клеточного автомата.

Теорема 1 *Пусть* $n, m \in \boldsymbol{N}$. *Если* $\min(n, m) = 1$, *то* $Q(n, m) = 2$;
если $n, m \ge 2$, *то* $Q(n, m) = 3$.

Теорема 2 *Для любых* $n, m \in \boldsymbol{N}$ $T(n, m) = \min(n, m)$.

Теорема 3 *Если* $n, m \in \boldsymbol{N}$, $m, n \ge 2$, *то*
$T(n, m, 3) \le 3nm + 1$,
$T(n, m, 4) \le n + m + \min(n, m) - 1$,
$T(n, m, 5) \le 2 \min(n, m) + 2$.

Доопределим теперь нулями все свободные входы экрана кроме одного, первого в верхней строке. Соответственно внешний автомат имеет только один выход. Таким образом, теперь задача состоит в построении генератора, который строит любое наперед заданное изображение, используя только один свободный вход. Показано, что для этого достаточно чтобы клеточный автомат имел конечное число состояний.

Теорема 4 *Если* $n, m \in \boldsymbol{N}$, $m, n \ge 2$, *то* $T(n, m, 8) \le 2mn + 5$.

Литература

1. В.Б. Кудрявцев, А.С. Подколзин, А.А. Болотов Основы теории однородных структур Москва, "Наука 1990.

2. В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин Введение в теорию автоматов. Москва, "Наука 1985.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.