Секция «Математика и механика»

Замкнутые локально минимальные сети на выпуклых многогранниках

Стрелкова Наталия Павловна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: n.strelk@gmail.com

Сетью называется геометрическая реализация графа.

Определение 1. [1] *Замкнутые локально минимальные сети (ЗЛМС)* — это экстремали функционала длины в классе сетей (обобщение замкнутых геодезических).

Теорема. [1] *На римановом многообразии Определение 1 эквивалентно Свойству 1.*

Свойство 1. *Для любой точки $P \in N$ сети N существует шар B с центром в P такой, что $N \cap B$ — кратчайшая сеть среди сетей, соединяющих точки $N \cap \partial B$.* Иначе говоря, ЗЛМС нельзя укоротить, деформируя её в малой окрестности её точки.

Теорема. (следствие результатов [2]) *На многообразиях неположительной секционной кривизны более сильное Свойство 2 эквивалентно Определению 1.*

Свойство 2. *Для сети N существует $\varepsilon > 0$ такое, что в своей ε-окрестности $B_\varepsilon(N)$ сеть N имеет наименьшую длину среди сетей, гомотопически эквивалентных сети N в $B_\varepsilon(N)$.* Иначе говоря, сеть нельзя укоротить малым шевелением, не разрывая её, даже если это шевеление затрагивает сеть по всей её длине.

Многогранник с выброшенными вершинами можно рассматривать как плоское риманово многообразие, поэтому для ЗЛМС на выпуклых многогранниках выполняются свойства 1 и 2. Кроме того, в этом случае есть ещё одно эквивалентное определение.

Определение 2. [1] На выпуклом многограннике сеть называется ЗЛМС, если все её рёбра — геодезические, а в каждой её вершине сходится три ребра под углами в 120°.

Теорема. *Если на выпуклом многограннике существует ЗЛМС, то существует способ разбить все вершины многогранника на группы, такие что в каждой группе сумма гауссовых кривизн вершин меньше 2π и делится на $\frac{\pi}{3}$.*

Теорема. [3] *Существует тетраэдр $ABCD$, на котором нет ЗЛМС, хотя гауссовы кривизны его вершин удовлетворяют условиям $K_A = \frac{2\pi}{3}$, $K_B = \frac{5\pi}{3}$, $K_C + K_D = \frac{5\pi}{3}$.*

Теорема. [3] *Если гауссовы кривизны всех вершин тетраэдра делятся на $\frac{\pi}{3}$, то на этом тетраэдре существует ЗЛМС.*

Литература

1. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

2. М. В. Пронин, *Локально минимальные сети на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны*, Вест. Моск. Унив., серия 1, 1998, № 5, С. 12–16

3. Н. П. Стрелкова, *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях неравногранных тетраэдров*, Мат. сборник, 2011, Т. 202, № 1, С. 141–160

Слова благодарности

Автор благодарит А. О. Иванова и А. А. Тужилина за постоянную поддержку.